IL MOTO

DEI SISTEMI RIGIDI

PER

DOMENICO TURAZZA

professore di Matematica applicata e d'Idraulica presso la Regia Università di Padova — Uno dei XL della Società Italiana delle Scienze — Del R. Istituto Veneto ecc. ecc. ecc.

PADOVA
TIPOGRAFIA EDITRICE F. SACCHETTO
1868

PREFAZIONE

Ho steso questo **Trattato del moto dei sistemi rigidi** principalmente in servigio dei miei giovani allievi; e ciò mi varrà a giustificazione del metodo in esso seguito. Calcando le orme così luminosamente tracciate dal Poinsot ho creduto fare opera utile all'istruzione, intimamente convinto che un tal metodo torni più d'ogni altro opportuno a concepire lo spirito del problema ed a formarsene un'idea chiara e distinta: se io non avessi raggiunto lo scopo ciò non dovrà certo essere imputato al metodo ma sì veramente a chi non seppe convenientemente giovarsene. Se non più avrò dato prova di buon volere, e ciò, spero, mi otterrà quel compatimento al quale difficilmente avrei potuto altrimenti aspirare.

INDICE

—

MOTO DEI SISTEMI RIGIDI

CAPO I.

Del moto di un sistema rigido considerato in sè stesso, indipendentemente dalle forze che lo producono.

Articolo I.

Nozioni.

1. *Sistema rigido* dicesi un sistema di punti materiali invariabilmente congiunti fra loro in modo che le forze operanti sul sistema sieno inette a produrre alcuna mutazione nella posizione relativa dei punti che lo compongono. Un tale sistema sotto all'azione delle cause che tendono a muoverlo può mutare di posizione ma non di forma.

Se per semplicità ad indicare un tale sistema useremo in progresso la parola *corpo* intenderemo sempre parlare di un corpo dotato dell'assoluta rigidità.

2. Per formarsi un'idea netta e precisa del movimento di un corpo giova considerare separatamente il moto puramente *progressivo* o *di traslazione* ed il *moto di rotazione* intorno ad un asse.

Il moto è *unicamente progressivo* o *di traslazione* quando praticata nel corpo una sezione qualunque, essa, durante il movimento, si mantiene sempre parallela a sè stessa. Nel moto progressivo dunque tutti i punti del sistema descrivono linee parallele ed eguali.

Nel *moto di rotazione* intorno ad un asse ciascun punto del corpo descrive un arco di cerchio il cui piano è perpendicolare all'asse, il cui centro è sull'asse, e di cui il raggio eguaglia la distanza del punto che si considera dall'asse intorno a cui avviene la rotazione; questo asse dicesi l'*asse di rotazione*.

3. Essendochè nel moto di traslazione tutti i punti del sistema descrivono linee parallele ed eguali, così il detto moto è pienamente determinato dal moto di uno qualunque dei punti appartenenti al sistema. Scelto uno qualunque di questi punti basterà assegnare ad ogni istante la direzione del suo movimento e la velocità di cui è dotato, e che sono la direzione e la velocità di tutti gli altri punti. Questa direzione e questa velocità saranno dunque la direzione e la velocità della traslazione, e tanto l'una quanto l'altra saranno rappresentabili mediante una retta di data direzione e lunghezza.

Egualmente mediante una retta di data direzione e grandezza è pure rappresentabile una qualunque rotazione. Infatti nel moto rotatorio tutti i punti del sistema descrivendo in tempo eguale archi di cerchio simili fra loro, chiamando *velocità angolare di rotazione* intorno ad un asse il rapporto esistente fra la velocità assoluta di un punto e la sua distanza dall'asse, ossia la velocità dei punti che distano uno dall'asse, il moto sarà pienamente determinato ad ogni istante dalla direzione dell'asse di rotazione e dalla velocità angolare del sistema, e tanto l'una quanto l'altra delle dette quantità sono rappresentabili mediante una retta di data direzione e lunghezza come si è asserito.

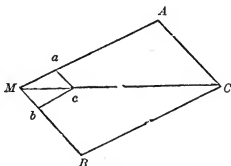
Per poter mediante la detta retta rappresentare eziandio il senso del movimento basterà dare alla retta origine e termine, e pel trasporto convenire che esso avvenga dall'origine della retta verso il suo termine, e per la rotazione che postosi l'osservatore in modo che la direzione della retta sia dai suoi piedi verso il suo capo la rotazione avvenga dalla sinistra dell'osservatore anteriormente alla sua destra.

4. Un sistema il quale alla fine del tempo t occupa una determinata posizione, nel tempo dt passa da questa posizione ad un'altra infinitamente vicina, pure pienamente determinata; ora è sempre possibile di passare dalla prima alla seconda posizione imprimendo al corpo due moti infinitesimi, l'uno di

traslazione e l'altro di rotazione intorno ad un asse, ed è appunto nella decomposizione del vero moto del corpo in questi due moti che sta l'artificio mediante cui possiamo venire a capo di formarci un' idea del vero moto del quale è dotato il corpo, nonchè di assegnare ad ogni istante la posizione occupata dallo stesso.

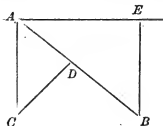
Giovano a quest'uopo le ricerche seguenti.

Articolo II.

Composizione delle traslazioni e delle rotazioni infinitesime.

5. Supponiamo che un sistema rigido sia contemporaneamente dotato di due traslazioni, l' una secondo la direzione MA con velocità rappresentata da MA, e l'altra secondo MB con velocità rappresentata dalla MB; per la prima nel tempo dt tutti i suoi punti, come M, si sposteranno parallelamente alla MA di uno spazio $Ma = MA . dt$ e per la seconda parallelamente ad MB di uno spazio $Mb = MB . dt$, e quindi per la loro contemporaneità descriveranno tutti spazietti paralleli ed eguali ad Mc, diagonale del parallelogrammo costruito sulle Ma ed Mb come lati. Il sistema dunque avrà una sola traslazione nella direzione della Mc con una velocità uguale $Mc : dt$; ma per la somiglianza delle figure $Macb$; $MACB$; Mc è nella stessa direzione di MC diagonale del parallelogrammo costruito sulle MA ed MB come lati, ed è $Mc = MC . dt$, per cui MC rappresenta la velocità della traslazione. Da ciò conchiuderemo che;

Teorema I. Due traslazioni infinitesime si compongono in

una traslazione unica rappresentata dalla diagonale del parallelogrammo costruito sulle rette che rappresentano le traslazioni componenti come lati.

6. Segue da ciò che le traslazioni infinitesime si compongono fra loro in una seguendo le stesse norme già segnalizzate per la composizione delle forze. Egualmente come più traslazioni infinitesime si compongono in una cosî, ad una traslazione possono sostituirsi più traslazioni, e questo in infinite maniere; badando che le dette traslazioni sieno tali che composte in una riproducano la traslazione a cui vengono sostituite.

7. Abbiasi una retta AB qualunque e da un punto C esterno alla stessa si conduca una CD perpendicolare alla retta, e congiunto C con A origine della retta data si progetti la AB in AE sopra una retta AE perpendicolare ad AC; per la somiglianza dei triangoli ABE ed ACD si avrà

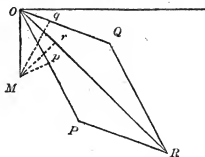
$$AE = \frac{AB.CD}{AC}$$

Ne discende che se da un punto qualunque preso nel piano di un parallelogrammo si conducano le perpendicolari ai due lati ed alla diagonale, e si dicano P, Q, R le lunghezze dei due lati e della diagonale, e p, q, r quelle delle rispettive normali sarà

$$R.r = \pm P.p \pm Q.q$$

accomodando opportunamente i due segni, imperocchè la proiezione della diagonale eguaglia la somma o la differenza delle proiezioni dei due lati secondo che il punto giace o esternamente o internamente al parallelogrammo proposto.

8. Ciò premesso sarà facile il dimostrare che;

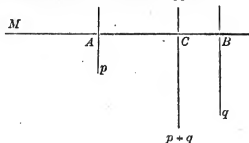
Teorema II. Due rotazioni infinitesime intorno ad assi concorrenti in un punto si compongono in una rotazione unica intorno ad un asse che è la diagonale del parallelogrammo costruito sulle due rette che rappresentano le rotazioni componenti come lati, e con una velocità angolare rappresentata dalla diagonale medesima.

Sieno OP ed OQ le due rette rappresentative delle due rotazioni date; compiuto il parallelogrammo $OPRQ$ dico che OR rappresenterà l'unica rotazione risultante. Infatti siccome il moto del corpo è pienamente determinato dal moto di una qualunque delle sue sezioni così si consideri la sezione fatta dal piano POQ, ed il moto del punto qualunque M situato nella sezione medesima. Condotte per M le perpendicolari Mp; Mq; Mr rispettivamente alle OP; OQ; OR; e rappresentando con P; Q; R le velocità angolari, e con p; q; r le lunghezze delle dette perpendicolari, per la rotazione P nel tempo dt il punto M si alzerà sul piano della figura di uno spazietto perpendicolare al detto piano ed eguale a $P.p.dt$, e per la rotazione Q di uno spazietto pure perpendicolare allo stesso piano ed eguale a $Q.q.dt$; quindi per le due rotazioni unite si alzerà di uno spazio

$$(P.p+Q.q)dt$$

ossia, § 7, di uno spazietto $R.r.dt$; dunque precisamente di tanto di quanto si alzerebbe per una rotazione intorno all'asse OR con velocità angolare R; quindi ecc.

9. Ne discende che le rotazioni infinitesime intorno ad assi concorrenti in un punto si compongono seguendo le stesse norme con cui si compongono le forze pure concorrenti in un punto, e che ad una rotazione infinitesima si possono sostituire altre rotazioni infinitesime purchè tali che composte in una riproducano la rotazione data.

10. Egualmente;

Teorema III. Due rotazioni infinitesime intorno a due assi paralleli fra loro si compongono in una sola rotazione intorno ad asse parallelo ai primi, giacente con essi in uno stesso piano così che la sua distanza dai medesimi sia inversamente proporzionale alla rispettiva velocità angolare di rotazione, con velocità angolare eguale alla somma delle velocità angolari componenti od alla loro differenza secondo che le due rotazioni hanno luogo nello stesso senso od in senso opposto.

Sieno p e q le velocità angolari intorno agli assi paralleli A e B, e si consideri un punto M qualunque della sezione fatta nel corpo dal piano dei due assi. Per M si guidi la MAB perpendicolare ai due assi, e sulla stessa si prenda il punto C così che sia

$$AC : CB = q : p;$$

ora per la rotazione p intorno A il punto M nel tempo dt descrive uno spazietto perpendicolare al piano degli assi ed eguale a $p . MA . dt$, e per la rotazione q egualmente uno spazietto $q . MB . dt$ quindi per le due rotazioni unite descriverà uno spazietto perpendicolare al piano degli assi ed eguale a

$$(p . MA + q . MB) . dt$$

Se ora per C si faccia passare un asse parallelo ai precedenti e si supponga che il sistema ruoti intorno allo stesso con

velocità angolare $p+q$, nel tempo dt il punto M descriverà uno spazietto perpendicolare pure al piano degli assi ed eguale a

$$(p+q)MC.dt=\{p.MA+p.AC+q.MB-q.CB\}.dt$$

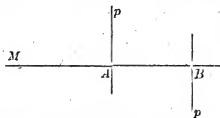
ma è $p.AC=q.CB$, dunque descriverà uno spazietto

$$(p.MA+q.MB)dt$$

come precedentemente; dunque ecc.

11. Si conchiude che anche le rotazioni infinitesime intorno ad assi paralleli si compongono fra loro nella stessa maniera con cui si compongono le forze parallele; e che ad una rotazione infinitesima si possono sostituire altre rotazioni infinitesime intorno ad assi paralleli a quello della rotazione purchè tali rotazioni composte insieme riproducano la rotazione data.

12. Pel caso delle rotazioni infinitesime intorno ad assi paralleli, come pel caso delle forze parallele, vi ha un' eccezione, quando cioè le due rotazioni sieno eguali e dirette in senso opposto, allora la regola precedente darebbe una rotazione nulla intorno ad asse situato all' infinito, locchè in ultima analisi si riduce a dire che in tal caso le due rotazioni non sono riducibili ad un'unica rotazione. È facile infatti lo scorgere che in tal caso il moto cambia di natura mutandosi da rotatorio in moto di trasporto, cioè le due rotazioni si trasformano in una traslazione; cioè

13. *Teorema IV.* Due rotazioni infinitesime intorno ad assi paralleli avvenendo in direzione opposta con eguale velocità angolare equivalgono ad una traslazione perpendicolare al piano degli assi, la cui velocità eguaglia il prodotto della velocità angolare delle rotazioni per la distanza dei due assi.

Sieno infatti A e B i due assi paralleli, e sia p la comune velocità angolare; preso nel piano degli assi un punto qualun-

que M e condotta per M una MAB perpendicolare ai due assi, per la rotazione p intorno all' asse A il punto M si sbasserà sotto il piano della figura di uno spazietto perpendicolare al detto piano ed eguale ad $MA.p.dt$, e per la rotazione p intorno B invece si alzerà di una quantità $MB.p.dt$ per cui definitivamente si alzerà di una quantità

$$(MB.p - MA.p)\,dt = (MB - MA)\,p\,dt = AB.p.dt$$

nella quale espressione non entrando più che la distanza AB dei due assi si scorge che tutti i punti si alzeranno della stessa quantità $AB.p.dt$; e che quindi le due rotazioni diventeranno una traslazione perpendicolare al piano dei due assi con velocità assoluta $AB.p$ come si è detto.

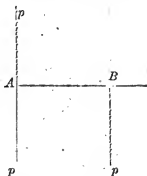
14. Per fissare il senso della traslazione basterà che l'osservatore si collochi in coincidenza con uno degli assi, piedi con piedi capo con capo, e così che l'altro asse giaccia alla sua sinistra, e allora la traslazione avverrà dal di dietro al davanti dell' osservatore stesso.

15. Discende che una traslazione può essere sostituita da due rotazioni eguali e contrarie intorno ad assi paralleli giacenti in un piano perpendicolare alla traslazione, comunque d'altra parte diretti nel piano medesimo, purchè il senso delle rotazioni corrisponda alla regola del paragrafo precedente, e il prodotto di ciascuna velocità angolare per la distanza dei due assi eguagli la velocità assoluta della traslazione.

16. Finalmente;

Teorema V. Una traslazione infinitesima ed una rotazione pure infinitesima intorno ad asse giacente in un piano perpendicolare alla traslazione si riducono ad una semplice rotazione con velocità angolare eguale a quella della rotazione primitiva, intorno ad un asse parallelo al primo, giacente con esso nello stesso piano perpendicolare alla traslazione e discosto dallo stesso di una quantità eguale alla velocità assoluta della traslazione divisa per la velocità angolare della rotazione, e collocato da quella parte che corrisponde alla regola del § 14.

Il piano della figura rappresenti infatti il piano condotto per l'asse di rotazione perpendicolarmente alla traslazione, che

si supponga succedere dal basso all'alto con velocità assoluta u, e sia p la velocità angolare della rotazione; pel § 15 alla traslazione si sostituiscano due rotazioni p e p intorno ad assi paralleli al primo e passanti il primo per A ed il secondo per B così che sia $AB = \frac{u}{p}$, e avremo in A due rotazioni eguali e contrarie che si distruggono, ed in B l'unica rotazione p, che è la primitiva trasportata parallelamente a sè stessa.

Egualmente apparirà che una rotazione intorno ad un asse può sostituirsi con una eguale rotazione intorno ad asse parallelo al primo e con una traslazione, la cui direzione sia perpendicolare al piano che passa per le due posizioni dell'asse, e la cui velocità assoluta sia il prodotto della velocità angolare della rotazione per la distanza dei due assi, combinando il senso secondo la norma del § 14.

17. Da tutto quanto si è diffusamente spiegato fin qui, risulta che tutte le traslazioni infinitesime e tutte le rotazioni infinitesime delle quali ad un dato istante può essere animato un sistema qualunque sono sempre riducibili ad un'unica traslazione e ad un'unica rotazione intorno ad asse parallelo alla traslazione.

Infatti trasportati tutti gli assi delle rotazioni a passare per uno stesso punto si avranno tante traslazioni quanti sono questi trasporti le quali si comporranno in una sola colle traslazioni originarie, più tante rotazioni intorno ad assi concorrenti in un punto che si ridurranno pure ad un'unica rota-

zione, per cui avremo dopo ciò un'unica traslazione ed una unica rotazione. Ciò fatto si scomporrà l'unica traslazione in due, l'una parallela all'asse dell'unica rotazione e l'altra perpendicolare allo stesso, e componendo quest'ultima colla rotazione avremo infine un'unica rotazione ed un'unica traslazione parallela all'asse dell'unica rotazione.

L'asse di unica rotazione al quale è parallela la traslazione dicesi asse *di scorrimento.*

Articolo III.

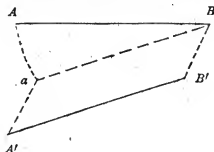
Rappresentazione del moto di un corpo.

18. La posizione di una figura piana nel suo piano è pienamente determinata allorchè sia data la posizione che occupano due qualunque de' suoi punti; imperocchè se per es. i punti *A* e *B* della figura devono coincidere coi punti *a* e *b* del piano, allorchè non sia permesso di rovesciar la figura, non vi ha che un solo modo di sovrapporre *A* ad *a* e *B* a *b*, e determinata la posizione di questi due punti, e quindi della retta *AB* che li congiunge, la posizione di tutta la figura è pienamente determinata.

Ne discende che la posizione di una figura piana è pienamente determinata quando sia data la posizione di tre de'suoi punti non situati in linea retta; imperocchè la posizione dei tre punti determina il piano in cui essa si trova, e due qualunque dei medesimi determina la sua posizione in quel piano.

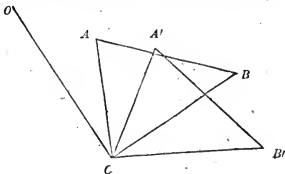
Siccome poi la posizione di un corpo nello spazio è pienamente determinata quando sia determinata la posizione di una sua sezione piana qualunque, così la posizione di un corpo nello spazio è pienamente determinata allorchè sia nota la posizione occupata da tre qualunque dei suoi punti non situati in linea retta.

19. Ciò premesso è facile lo scorgere che se una figura piana si muove comunque nel suo piano il suo moto ad ogni singolo istante può considerarsi come un moto di rotazione

intorno ad un asse perpendicolare al detto piano e passante per un punto determinato del piano medesimo.

Supponiamo infatti che essendo A e B i due punti determinanti la posizione della figura alla fine del tempo t nel tempo dt essi passino in A', B', egli è evidente che potremo farli passare dalla prima alla seconda posizione così, prima girando il piano della figura intorno ad asse perpendicolare allo stesso e passante per B di un angolo ABa così che Ba divenga parallela a $B'A'$, e trasportando la figura parallelamente a sè stessa nel suo piano così da sovrapporre $a\ B$ ad $A'B'$. Con ciò la figura passerà dalla prima alla seconda posizione mediante una rotazione intorno ad un asse perpendicolare al suo piano ed una traslazione in un piano perpendicolare al detto asse; ma pel teorema V, § 16 queste equivalgono ad una rotazione unica intorno ad asse parallelo al primo e pienamente determinato di posizione, dunque ecc.

20. I passaggi successivi della figura da una sua posizione ad un'altra infinitamente vicina si potranno dunque effettuare mediante successive rotazioni intorno ad assi perpendicolari al suo piano e passanti per punti dei quali sarà data la posizione tanto nel piano immobile dove si deve aggirare la figura quanto nel piano mobile della figura stessa, i quali punti staranno rispettivamente sopra due curve pienamente determinate, cosicchè il moto della figura nel suo piano si ridurrà a quello della seconda delle dette curve che va ruzzolando senza strisciare sopra la prima tenuta fissa, e siccome dato il moto di una sezione qualunque di un corpo il moto del corpo riesce determinato, così;

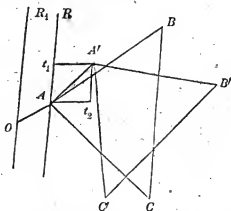
Se un corpo si muove così che una sua sezione qualunque si mantenga costantemente nello stesso piano il suo moto può sempre ridursi al moto di un cilindro mobile che ruzzola senza strisciare sopra un cilindro tenuto fisso nello spazio.

21. Egualmente se una figura piana si muove così che uno dei suoi punti resti costantemente fermo il moto della figura ad ogni singolo istante può sempre ridursi ad una semplice rotazione intorno ad un asse passante pel punto fisso.

Sia infatti C il punto della figura che resta fisso e sieno A e B due altri punti della figura stessa non situati in linea retta con C; dopo il tempo dt i punti A e B sieno passati in A' e B', e sia CO la comune intersezione dei due piani CAB e $CA'B'$; evidentemente mediante una rotazione intorno CO il piano CAB si conduce a sovrapporsi al piano $CA'B'$, e quindi mediante una rotazione intorno ad un asse passante pure per C e perpendicolare al piano $CA'B'$ la figura CAB si sovrappone alla $CA'B'$: la sovrapposizione dunque si fa mediante due rotazioni l'una intorno CO l'altra intorno un asse passante per C e perpendicolare al piano $CA'B'$; ma concorrendo i due assi in C le due rotazioni si riducono ad una intorno ad asse passante per C dunque ecc.

22. I passaggi successivi della figura da una sua posizione ad un'altra infinitamente vicina si potranno dunque effettuare mediante successive rotazioni intorno ad assi passanti tutti pel punto fisso e che saranno dati di posizione tanto relativamente al piano mobile della figura quanto nello spazio assoluto, e staranno sopra due superficie coniche pienamente determinate

ed aventi ambedue il vertice nel punto fisso, così il moto della figura si otterrà facendo ruzzolare il cono mobile sopra il fisso senza strisciare; e siccome il moto di un corpo è determinato da quello di una sua sezione qualunque, così;

Il moto del corpo che gira intorno ad un punto fisso può sempre ridursi al moto di un cono mobile che ruzzola senza strisciare sopra un secondo cono tenuto fisso nello spazio.

23. Comunque una figura piana si muova nello spazio è sempre possibile di farla passare da una sua posizione ad un'altra infinitamente vicina mediante una semplice traslazione ed una semplice rotazione, e ciò in infinite maniere, fra le quali possiamo sempre scegliere quella per cui la traslazione è parallela all'asse dell' unica rotazione.

Infatti si fissino ad arbitrio tre punti A, B, C della data figura non situati in linea retta, e si supponga che alla fine del tempo $t + dt$ essi passino in A', B', C'. Come precedentemente tenendo fermo A mediante una rotazione si conduca il triangolo ABC ad essere parallelo al triangolo $A'B'C'$, e quindi con una traslazione si conduca A a coincidere con A', e la sovrapposizione della figura si avrà perciò con una rotazione ed una traslazione, e siccome la scelta del punto A è arbitraria così ciò si potrà fare in infinite maniere. Nel caso della figura sia AR l'asse della rotazione e sarà AA' la traslazione; questa si scomponga in due l'una At_1 secondo AR, l'altra At_2 perpendicolare ad AR ed alla rotazione AR si sostituisca (§ 16)

una rotazione intorno ad asse OR_1, parallelo ad AR ed una traslazione eguale e direttamente contraria alla At_2, allora questa si distruggerà e rimarrà solo la rotazione intorno l'asse OR_1 e la traslazione At_1 parallela all'asse. Da ciò discende che siccome il moto di un corpo è determinato da quello di una sua sezione qualunque così:

Qualunque sia il moto di un corpo nello spazio esso può sempre in ogni singolo istante ridursi ad una rotazione e ad una traslazione parallela all'asse dell'unica rotazione.

È questo precisamente il moto della vite nella sua chiocciola.

Siccome ad ogni singolo istante il corpo può considerarsi come dotato di una rotazione intorno ad un asse determinato, il quale varia generalmente di posizione e nel corpo e nello spazio da un istante al successivo, così si scorge che la rotazione intorno ad un asse determinato non ha luogo che per la durata di un solo istante, scorso il quale la rotazione avviene intorno ad un secondo asse pure completamente determinato, e così via: per questa ragione l'asse intorno a cui a un dato istante si considera avvenire la rotazione, dicesi *asse istantaneo di rotazione.*

25. All'unica traslazione ed all'unica rotazione, alle quali è sempre riducibile il moto del sistema nel tempo infinitesimo dt, si possono in ogni caso sostituire due rotazioni infinitesime intorno ad assi paralleli a due rette date comunque, purchè non parallele fra loro. Da una tale sostituzione trasse il Chasles molte brillantissime proprietà del moto di un sistema (Chasles, *Propriétés géométriques relatives au mouvement infiniment petit d'un corps* — Comptes rendus 26 juin 1843); se non che simili ricerche restando più nel campo della Geometria che non in quello della Meccanica non possono qui trovar luogo, ed io rimando a quella memoria chi desiderasse una più estesa instruzione in questo riguardo, non chè alle memorie citate dal prof. Bellavitis al § 240, pag. 367 della sua memoria, *Sposizione dei nuovi metodi di Geometria Analitica* che fa parte del volume VIII delle *Memorie dell'Istituto Veneto di Scienze, Lettere ed Arti.*

CAPO II.

Dei momenti d'inerzia, e dei piani e degli assi permanenti e principali, sotto l'aspetto puramente geometrico.

ARTICOLO I.

Definizioni e teoremi fondamentali.

26. Le condizioni che si riportano alla massa di un sistema ed alla sua distribuzione vengono determinate dai dieci integrali seguenti:

$$\Sigma\Delta m;\quad \Sigma x\Delta m;\quad \Sigma y\Delta m;\quad \Sigma z\Delta m$$

$$\Sigma x^2\Delta m;\quad \Sigma y^2\Delta m;\quad \Sigma z^2\Delta m;\quad \Sigma xy\Delta m;\quad \Sigma xz\Delta m;\quad \Sigma yz\Delta m$$

supponendo il sistema riferito ad assi rettangolari fissi nel sistema, e la cui origine è situata in un punto del sistema medesimo.

Il primo dei detti integrali rappresenta la massa totale del sistema, che noi rappresenteremo costantemente con m.

I tre seguenti rappresentano i prodotti della massa del sistema per le coordinate del suo baricentro, e si annulleranno ogni qualvolta si fissi l'origine degli assi nel baricentro stesso.

Gli altri sei entrano ora in campo per la prima volta, e per essi si devono introdurre alcune particolari denominazioni, ed alcune notazioni, e noi per uniformità porremo:

$$(1)\begin{cases}\Sigma x^2\Delta m = m\lambda_x^2; & \Sigma y^2\Delta m = m\lambda_y^2; & \Sigma z^2\Delta m = m\lambda_z^2 \\ \Sigma xy\Delta m = mi\lambda_{x,y}; & \Sigma xz\Delta m = mi\lambda_{x,z}; & \Sigma yz\Delta m = mi\lambda_{y,z}\end{cases}$$

Ora;

27. Dicesi *momento d'inerzia* di un sistema *rapporto ad una data retta* la somma dei prodotti che si ottengono moltiplicando la massa di ciascun elemento materiale pel quadrato della sua distanza dalla retta stessa.

Diremo poi *momento d'inerzia rapporto ad un piano* la somma dei prodotti che si ottengono moltiplicando la massa di ciascun

elemento materiale pel quadrato della sua distanza dal piano stesso.

Per ciò $m\lambda_x^2$; $m\lambda_y^2$; $m\lambda_z^2$ rappresentano i momenti di inerzia del sistema rapporto ai piani YZ; XZ; XY rispettivamente; e se diciamo mi_x^2; mi_y^2; mi_z^2 i tre momenti di inerzia del sistema rapporto agli assi X; Y; Z sarà manifestamente

$$(2)\ i_x^2 = \lambda_y^2 + \lambda_z^2;\quad i_y^2 = \lambda_x^2 + \lambda_z^2;\quad i_z^2 = \lambda_x^2 + \lambda_y^2$$

Momento complesso rapporto a due piani rispettivamente perpendicolari fra loro diremo poi la somma dei prodotti che si ottengono moltiplicando la massa di ciascun elemento materiale del sistema per le sue distanze dai piani predetti; e quindi $mi\lambda_{x,y}$; $mi\lambda_{x,z}$; $mi\lambda_{y,z}$ rappresenteranno rispettivamente i momenti complessi rapporto ai piani YZ, XZ; YZ, XY; XZ, XY.

28. È questo il vero senso meccanico che hanno gli integrali superiori, e quello secondo cui saranno in seguito usati da noi; però alla loro determinazione gioverà alcune volte riferire il sistema ad assi non rettangolari, e calcolati i valori dei precedenti integrali rapporto a tale sistema di assi sarà poi facile l'ottenerli rapporto ad un dato sistema ortogonale. Conserveremo quindi loro le stesse denominazioni anche se riferiti ad assi obbliquangoli, solo allora le distanze dovranno essere computate parallelamente agli assi che si considerano.

29. Quando siensi ottenuti i valori dei sei integrali predetti rapporto a tre piani passanti pel baricentro si avranno i loro valori rapporto a tre nuovi piani paralleli ai medesimi ma passanti per un punto di coordinate x_0; y_0; z_0 aumentando rispettivamente i primi di mx_0^2; my_0^2; mz_0^2 ed i secondi di mx_0y_0; mx_0z_0; my_0z_0.

Infatti dette x'; y'; z' le coordinate dell'elemento generico Δm rapporto al nuovo sistema di assi sarà:

$$x' = x - x_0;\quad y' = y - y_0;\quad z' = z - z_0$$

ed essendo $\Sigma x\,\Delta m = o$; $\Sigma y\,\Delta m = o$; $\Sigma z\,\Delta m = o$, sarà

$$\Sigma x'^2\,\Delta m = \Sigma x^2\,\Delta m + x_0^2\ \Sigma\,\Delta m \text{ ecc.}$$

$$\Sigma x'y'\,\Delta m = \Sigma xy\,\Delta m + x_0y_0\cdot\Sigma\,\Delta m \text{ ecc.}$$

donde

$$(3)\begin{cases} \lambda_{x'}^2 = \lambda_x^2 + x_0^2;\ \lambda_{y'}^2 = \lambda_y^2 + y_0^2;\ \lambda_{z'}^2 = \lambda_z^2 + z_0^2 \\ i\lambda_{x'y'} = i\lambda_{xy} + x_0\, y_0;\ i\lambda_{x'z'} = i\lambda_{xz} + x_0 z_0;\ i\lambda_{y'z'} = i\lambda_{yz} + y_0\, z_0 \end{cases}$$

30. Egualmente il momento d'inerzia rapporto ad una retta qualunque eguaglia il momento d'inerzia rapporto ad una retta parallela alla stessa e passante pel baricentro del sistema aumentato del prodotto della massa del sistema pel quadrato della distanza della retta data dal baricentro.

Se infatti si considerano gli assi X'; Y'; Z' paralleli agli assi passanti pel baricentro e di cui l' origine sia il punto di coordinate x_0; y_0; z_0, e diciamo $D_{x'}$; $D_{y'}$; $D_{z'}$ le distanze rispettive degli assi X'; Y'; Z' dagli assi X; Y; Z sarà

$$i_{x'}^2 = \lambda_{y'}^2 + \lambda_{z'}^2;\quad i_{y'}^2 = \lambda_{x'}^2 + \lambda_{z'}^2;\quad i_{z'}^2 = \lambda_{x'}^2 + \lambda_{y'}^2$$

$$D_{x'}^2 = y_0^2 + z_0^2;\quad D_{y'}^2 = x_0^2 + z_0^2;\quad D_{z'}^2 = x_0^2 + y_0^2$$

e quindi, per le (2) e le (3)

$$(4)\ i_{x'}^2 = i_x^2 + D_{x'}^2;\quad i_{y'}^2 = i_y^2 + D_{y'}^2;\quad i_{z'}^2 = i_z^2 + D_{z'}^2$$

31. Così pure qualora siensi calcolati i valori dei sei integrali predetti rapporto ad un sistema di assi ortogonali passanti pel baricentro, si avranno facilmente rapporto ad un altro sistema di assi, pure ortogonali ,e passante pel baricentro, mediante le seguenti formule.

Sieno

$$a;\ a_1;\ a_2;\ b;\ b_1;\ b_2;\ c;\ c_1;\ c_2:$$

i coseni degli angoli che gli assi X'; Y'; Z' fanno rispettivamente cogli assi X, Y, Z, avremo

$$x' = a.x + a_1.y + a_2.z;\quad y' = b.x + b_1.y + b_2.z;\quad z' = c.x + c_1.y + c_2.z.$$

Facendo i quadrati ed i prodotti dei precedenti valori, moltiplicandoli per Δm e poi sommandoli avremo .

$$(5)\ \lambda_{x'}^2 = a^2\lambda_x^2 + a_1^2\lambda_y^2 + a_2^2\lambda_z^2 + 2aa_1 i\lambda_{xy} + 2aa_2 i\lambda_{xz} + 2a_1 a_2 i\lambda_{yz}$$

e analogamente gli altri due; e così pure

$$(6) \qquad i\lambda x\, y' = a\, b\, .\, \lambda_x^2 + a_1 b_1 \,.\, \lambda_y^2 + a_2 b_2 \,.\, \lambda_z^2$$
$$+ (ab_1 + a_1 b)\, i\lambda xy + (a\, b_2 + a_2 b)\, i\lambda xz + (a_1 b_2 + a_2 b_1) i\lambda y\, z$$

e così gli altri due.

32. In quanto ai momenti di inerzia rapporto agli assi X', Y', Z', essendo

$$i_{x'}^2 = \lambda_{y'}^2 + \lambda_{z'}^2$$

sarà

$$i_{x'}^2 = (b^2 + c^2)\, \lambda_x^2 + (b_1^2 + c_1^2)\lambda_y^2 + (b_2^2 + c_2^2)\, \lambda_z^2$$
$$+ 2\{b\, b_1 + cc_1\}\, i\lambda_{xy} + 2\{bb_2 + cc_2\}\, i\lambda_{xz} + 2\{b_1 b_2 + c_1 c_2\} i\lambda_{yz};$$

ma dalle (2) si ha tosto

$$2\lambda_x^2 = i_y^2 + i_z^2 - i_x^2;\ 2\lambda_y^2 = i_x^2 + i_z^2 - i_y^2;\ 2\lambda_z^2 = i_x^2 + i_y^2 - i_z^2$$

e dalle note relazioni fra i coseni a, a, a_2, ecc.

$$b^2 + c^2 = 1 - a^2;\ b_1^2 + c_1^2 = 1 - a_1^2;\ b_2^2 + c_2^2 = 1 - a_2^2$$
$$1 - a_1^2 - a_2^2 = a^2;\quad 1 - a^2 - a_2^2 = a_1^2;\quad 1 - a^2 - a_1^2 = a_2^2$$
$$bb_1 + cc_1 = -aa_1;\ bb_2 + cc_2 = -aa_2;\ b_1 b_2 + c_1 c_2 = -a_1 a_2$$

mediante le quali la superiore si trasforma tosto nella

$$(7) \qquad i_{x'}^2 = a^2 \cdot i_x^2 + a_1^2 \cdot i_y^2 + a_2^2 \cdot i_z^2$$
$$- 2aa_1 \cdot i\lambda_{xy} - 2aa_2 \cdot i\lambda_{xz} - 2a_1 a_2 \cdot i\lambda_{yz}$$

analogamente si troverebbero $i_{y'}^2$; $i_{z'}^2$.

33. Se il sistema X, Y, Z non fosse ortogonale ma tale fosse il sistema X' Y' Z' le formole precedenti (5) e (6) non riescirebbero mutate, solo allora fra le nove quantità a, b, c; a_1, b_1, c_1; a_2, b_2, c_2 non sussisterebbero che le sole relazioni

$$a^2 + b^2 + c^2 = 1;\quad a_1^2 + b_1^2 + c_1^2 = 1;\quad a_2^2 + b_2^2 + c_2^2 = 1.$$

34. Dal concetto stesso dei momenti risulta che il momento totale di uno o più sistemi eguaglia la somma dei momenti delle singole parti in cui il sistema può essere suddiviso, o la somma dei momenti di ciascun sistema in particolare; donde risulta tosto che il momento di un corpo cavo si avrà calcolando il momento del solido pieno e sottraendovi quello corrispondente allo spazio cavo, supposto questo ripieno della stessa materia di quella che costituisce il solido pieno ed egualmente distribuita.

Articolo II.

Calcolo dei momenti per alcuni corpi fra i più comunemente usati.

35. Sia il corpo omogeneo: condotti pel baricentro i tre assi X; Y; Z esprimiamo con S_x ; S_y ; S_z le aree delle sezioni fatte nel sistema stesso da piani rispettivamente paralleli ai piani coordinati YZ; XZ; XY, e situati alle distanze x, y, z dall'origine; supposta uno la densità, siccome tutti gli elementi dello strato che ha per base S_x distano egualmente x dal piano YZ così sarà manifestamente

$$m\lambda_x^2 = \Sigma\, S_x \,.\, x^2 \,\Delta\, x$$

estendendo la somma a tutto il sistema; così dicendosi degli altri avremo

$$(8)\quad \lambda_x^2 = \frac{\Sigma\, S_x \,.\, x^2 \,\Delta\, x}{m}\;;\; \lambda_y^2 = \frac{\Sigma\, S_y \,.\, y^2 \,\Delta\, y}{m}\;;\; \lambda_z^2 = \frac{\Sigma\, S_z \,.\, z^2 \,\Delta\, z}{m}$$

36. In quanto ai momenti complessi osserveremo in prima che se il sistema proposto è tale che tutte le sezioni fatte nello stesso da piani paralleli fra loro abbiano i loro baricentri situati in linea retta allora, prendendo questa retta per uno degli assi, per es. per asse X, e prendendo per piano YZ il piano parallelo ai piani secanti e passante pel baricentro del sistema sarà

$$i\lambda_{xy} = 0\;;\qquad i\lambda_{xz} = 0$$

Infatti se consideriamo l'elemento interchiuso fra i due piani condotti alle distanze x ed $x+dx$ dall'origine le quantità precedenti risultano rispettivamante espresse da

$$\Sigma\{x.\Sigma y \Delta m\}; \qquad \Sigma\{x.\Sigma z \Delta m\}$$

essendo per tutte le singole parti costante la x; ma passando l'asse X pel baricentro dello strato è

$$\Sigma y \Delta m = o; \qquad \Sigma z \Delta m = o$$

dunque ecc.

37. Pel caso generale proponiamoci ad esempio di voler assegnare il valore di

$$m i \lambda_{xy} = \Sigma x y \Delta m .$$

Alla distanza x dall' origine si immagini praticata una sezione con un piano parallelo al piano YZ ed in qnesta sezione si conducano due assi paralleli ai coordinati Y, Z pel punto in cui la sezione stessa è attraversata dall'asse X; alla distanza y dall'origine si conduca nella sezione una retta parallela a Z e dicasi z_1 la porzione di questa retta che è racchiusa dentro il contorno della sezione, e che sarà una funzione nota della y. Con ciò il corpo verrà suddiviso negli elementi

$$d m = z_1 . dy . dx$$

i quali distano tutti egualmente di x dal piano YZ; quindi nella quantità

$$x\, dx\, \Sigma z_1 y\, d y$$

avremo il momento complesso dello strato che dista x dal piano YZ, purchè si estenda la somma a tutti i valori di y compresi nella detta sezione. Eseguita una tal somma riescirà una funzione nota di x, che diremo $f(x)$, e quindi pel momento totale si avrà

$$\Sigma x f(x) dx$$

estendendo la somma ai limiti estremi della x. Analogamente si troveranno gli altri due.

38. Applichiamo il metodo generale ora esposto ad alcuni esempi.

I. Momenti in un elissoide omogeneo.

Scelti per assi gli assi dell'elissoide sieno a, b, c i valori dei semi-assi, e quindi sia

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$$

l'equazione dell'elissoide medesimo.

Manifestamente pel teorema al § 36 sarà

$$i\lambda_{xy}=o;\ i\lambda_{xz}=o;\ i\lambda_{yz}=o;$$

e quindi § 35,

$$S_x=\pi\, b\, c\left\{1-\frac{x^2}{a^2}\right\};\ S_y=\pi\, a\, c\left\{1-\frac{y^2}{b^2}\right\};\ S_z=\pi\, a\, b\left\{1-\frac{z^2}{c^2}\right\}$$

$$m=\frac{4}{3}\pi\, a\, b\, c$$

Sostituendo questi valori nelle (8) ed integrando sarà

$$\lambda_x^2=\frac{1}{5}a^2;\ \lambda_y^2=\frac{1}{5}\ b^2;\ \lambda_z^2=\frac{1}{5}c^2$$

e quindi

$$i_x^2=\frac{1}{5}(b^2+c^2);\ i_y^2=\frac{1}{5}(a^2+c^2);\ i_z^2=\frac{1}{5}(a^2+b^2)$$

39. *II. Momenti in un parallelepipedo.*

Sia il parallelepipedo obbliquangolo; fissiamo l'origine nel baricentro e prendiamo i tre assi rispettivamente paralleli ai tre spigoli del parallelepipedo, le cui lunghezze sieno $2a$, $2b$, $2c$. Manifestamente § 36 è $i\lambda_{xy}=o$; $i\lambda_{xz}=o$; $i\lambda_{yz}=o$, e § 35

$$S_x=4\, b\, c\,.\text{sen}\,\widehat{YZ};\ S_y=4\, a\, c\,.\text{sen}\,\widehat{XZ};\ S_z=4\, a\, b\,.\ \text{sen}\,\widehat{XY}$$

quindi

$$\Sigma\, S_x\,.\,x^2\,.\,\Delta x=\frac{8}{3}b\, c\,.\,a^3.\text{sen}\,\widehat{YZ};\ \Sigma\, S_x\,.\,\Delta x=8\, a\, b\, c.\text{sen}\,\widehat{YZ}$$

ed

$$\lambda_x^2 = \frac{1}{3} a^2$$

Così sarà pure $\lambda_y^2 = \frac{1}{3} b^2$; $\lambda_z^2 = \frac{1}{3} c^2$

Le predette quantità diventano i veri momenti se il parallelepipedo è rettangolo.

40. *III. Momenti in un cilindro retto a base elittica.*

Si riferisca il sistema al piano XY parallelo alle basi e passante pel punto di mezzo dell'altezza ed ai piani XZ ed YZ passanti per i due assi dell'elisse base, che diremo rispettivamente $2a$ e $2b$ e sia $2l$ l'altezza del cilindro. Sarà

$$S_x = 4\,l\,b \,.\, \sqrt{\left\{1 - \frac{x^2}{a^2}\right\}}; \quad S_y = 4\,l\,a \,.\, \sqrt{\left\{1 - \frac{y^2}{a^2}\right\}}; \quad S_z = \pi\,a\,b$$

$$m = 2\,\pi\,a\,b\,.\,l$$

donde

$$\lambda_x^2 = \frac{1}{4} a^2; \quad \lambda_y^2 = \frac{1}{4} b^2; \quad \lambda_z^2 = \frac{1}{3} l^2$$

e sarà poi § 36

$$i\lambda_{xy} = o\,; \quad i\lambda_{xz} = o\,; \quad i\lambda_{yz} = o$$

41. Se il cilindro è vuoto, e la parte vuota sia essa pure un cilindro retto avente per base un'elisse concentrica all'elisse della base esterna e cogli assi nella medesima direzione, detti a_2, b_2 gli assi dell'elisse esterna, a_1, b_1 quelli dell'interna, pel § 34 sarà

$$\lambda_x^2 = \frac{1}{4}\,\frac{a_2^3\,b_2 - a_1^3\,b_1}{a_2\,b_2 - a_1\,b_1}; \quad \lambda_y^2 = \frac{1}{4}\,\frac{a_2\,b_2^3 - a_1\,b_1^3}{a_2\,b_2 - a_1\,b_1}; \quad \lambda_z^2 = \frac{1}{3} l^2$$

Se sia $a_2 : b_2 = a_1 : b_1$ sarà

$$\lambda_x^2 = \frac{1}{4}\left(a_1^2 + a_2^2\right); \quad \lambda_y^2 = \frac{1}{4}\left(b_1^2 + b_2^2\right)$$

e se il cilindro è a base circolare e sieno r_2 ed r_1 i raggi delle basi esterna ed interna

$$\lambda_x^2 = \lambda_y^2 = \frac{1}{4}\left(r_1^2 + r_2^2\right)$$

12. *IV. Momenti in un tronco di cono retto a base elittica.* Si fissi l'origine nel centro della base, e si prendano per piano XY il piano della base, per piano XZ il piano che passa per l'asse del cono e per uno degli assi dell'elisse base, e per piano YZ il piano che passa per l'asse del cono e pel secondo asse della base. Sieno a e b i semi-assi della base inferiore; a_1 e $b_1 = \frac{b}{a} a_1$ i semi-assi della superiore; h l'altezza del tronco. Si scomponga il cono in elementi paralleli alla base e di altezza dz, i quali si potranno considerare come altrettanti cilindri retti a base elittica e di altezza dz; l'elemento che dista z dalla base avrà per semi-assi

$$a_z = \frac{a}{h}\left\{h - \frac{a - a_1}{a} z\right\}; \quad b_z = \frac{b}{h}\left\{h - \frac{b - b_1}{b} z\right\}.$$

ossia, per essere $b_1 = \frac{b}{a} \cdot a_1$

$$b_z = \frac{b}{h}\left\{h - \frac{a - a_1}{a} z\right\}$$

I momenti quindi del detto cilindro elementare rapporto ai piani YZ; XZ saranno

$$\frac{1}{4}\pi \frac{a^3 b}{h^4}\left\{h - \frac{a - a_1}{a} z\right\}^4 . dz; \quad \frac{1}{4}\pi \frac{a b^3}{h^4}\left\{h - \frac{a - a_1}{a} z\right\}^4 . dz$$

Integrando questi ed estendendo gli integrali da $z = o$ a $z = h$ e ricordando essere

$$m = \frac{1}{3}\pi \frac{a^3 - a_1^3}{a - a_1} . \frac{b}{a} . h$$

si avrà

$$\lambda_x^2 = \frac{3}{20} \cdot \frac{a^5 - a_1^5}{a^3 - a_1^3}; \quad \lambda_y^2 = \frac{3}{20} \cdot \frac{b^2}{a^2} \cdot \frac{a^5 - a_1^5}{a^3 - a_1^3}.$$

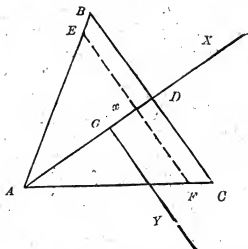
essendo poi

$$S_z = \pi \cdot \frac{a\,b}{h^2}\left\{h - \frac{a-a_1}{a} z\right\}^2$$

si avrà

$$\lambda_z^2 = \frac{1}{10} \cdot \frac{a^2 + 3\,aa_1 + 6\,a_1^2}{a^2 + aa_1 + a_1^2} \cdot h^2$$

Se il cono è completo sarà $a_1 = o$ e allora

$$\lambda_x^2 = \frac{3}{20} \cdot a^2; \qquad \lambda_y^2 = \frac{3}{20} \cdot b^2; \qquad \lambda_z^2 = \frac{1}{10} \cdot h^2$$

13. *V. Momenti in un prisma retto a base triangolare.*

Sia $A\,B\,C$ la sezione del prisma fatta da un piano parallelo alle basi e passante pel baricentro G del sistema; si prendano per piani XY il piano della sezione $A\,B\,C$, $X\,Z$ il piano passante per l'asse del prisma e per lo spigolo A, e per $Y\,Z$ il piano passante per l'asse del prisma e parallelo alla faccia $B\,C$.

Ponendo $B\,C = 2a$; $A\,D = h$ e detta $2l$ l'altezza del prisma, sarà $A\,G = \frac{2}{3}\,h$ ed

$$S_x = 4\,\frac{a\,.\,l}{h}\left\{\frac{2}{3}\,h + x\right\};\; S_y = 2\,.\,\frac{l\,.\,h}{a}(a - y);\; S_z = h\,a\,.\,\text{sen}\,\widehat{XY}$$

sarà poi

$$m = 2\,h\,a\,l\,.\,\mathrm{sen}\,\widehat{XY}$$

Con questi valori si troverà

$$\lambda_x^2 = \frac{1}{18} \cdot \frac{h^2}{\mathrm{sen}\,\widehat{XY}}; \quad \lambda_y^2 = \frac{1}{6} \cdot \frac{a^2}{\mathrm{sen}\,\widehat{XY}}; \quad \lambda_z^2 = \frac{1}{3}\,l^2$$

Egli è poi evidente che l'asse X passa pei centri di gravità di tutte le sezioni praticate nel sistema parallelamente al piano YZ, e quindi sarà

$$i\lambda_{xy} = o; \quad i\lambda_{xz} = o$$

e siccome di più il sistema è simmetrico da una parte e dall'altra del piano XY così sarà pure

$$i\lambda_{yz} = o$$

11. Se la base del prisma è un triangolo isoscele allora i tre assi predetti saranno rettangolari, e sarà sen $\widehat{XY} = 1$; ma negli altri casi Z sarà perpendicolare sì agli assi X ed Y ma questi due si inclineranno fra loro di angolo differente dal retto; volendosi le predette quantità rapporto ad un sistema di piani rettangolari basterà lasciare inalterati i piani XY ed XZ e prendere il piano $Y'Z$ perpendicolare al piano XZ; rifacendosi allora alle formole (5) e (6) si avrà

$$a = 1;\ a_1 = \cos XY;\ a_2 = o;\ b = o;\ b_1 = \mathrm{sen}\,XY;\ b_2 = o;\ c = o;\ c_1 = o;\ c_2 = 1$$

e quindi

$$\lambda_{x'}^2 = \frac{1}{18\,.\,\mathrm{sen}\,\widehat{XY}}\left\{h^2 + 3\,a^2\,.\,\cos^2\widehat{XY}\right\}$$

$$\lambda_{y'}^2 = \frac{1}{6}\,a^2\,.\,\mathrm{sen}\,\widehat{XY}; \quad \lambda_{z'}^2 = \frac{1}{3}\,l^2$$

$$i\lambda_{x'y'} = \frac{1}{6}\,a^2\,.\cos\widehat{XY}; \quad i\lambda_{x'z'} = o; \quad i\lambda_{y'z'} = o$$

45. *VI. Assegnare i momenti in un tetraedro.*

Sia $ABCD$ il tetraedro dato e sieno p, q, r le lunghezze delle rette che congiungono i punti di mezzo delle tre paia di spigoli BC, AD; AC, BD; AB, CD.

Se tagliamo il tetraedro con un piano parallelo agli spigoli AD, BC, e quindi alle rette q ed r, produremo una sezione $abcd$ la quale sarà un parallelogrammo, dovendo rispettivamente essere paralleli i lati bc, ad perchè paralleli ad AD, e ba, cd perchè paralleli a BC; di più i lati ba, e cd saranno divisi per metà dal piano ADP_1 condotto per AD al punto di mezzo di BC; ed i lati bc, ad saranno divisi per metà dal piano BCP condotto per BC alla metà di AD; quindi la retta p secondo cui si tagliano questi due piani passerà pel baricentro g della sezione $abcd$ e pei baricentri di tutte le sezioni ad essa parallele: considerando dunque il tetraedro diviso in elementi infitesimi aventi per base le dette sezioni, i loro baricentri, e quindi

il baricentro del sistema, si troveranno tutti sulla retta p: per la stessa ragione il baricentro del sistema si troverà sulle rette q ed r e quindi si troverà nel punto O di loro reciproco incontro. Prendendo questo punto O come origine e gli assi X, Y, Z, secondo le rette p, q, r avremo

$$i\lambda_{xy} = o; \quad i\lambda_{xz} = o; \quad i\lambda_{yz} = o$$

poi sarà

$$cd : BC = \frac{1}{2} p - x : p; \quad cb : AD = \frac{1}{2} p + x : p$$

donde

$$S_x = BC.AD.\ \mathrm{sen}\,(cd, cb)\ \frac{p^2 - 4x^2}{4\ p^2}$$

e

$$\lambda_x^2 = \frac{1}{20} p^2; \ \lambda_y^2 = \frac{1}{20} \cdot q^2; \ \lambda_z^2 = \frac{1}{20} \cdot r^2$$

Se il tetraedro è regolare allora le tre dividenti p, q, r sono ortogonali fra loro ed eguali, in tal caso i tre momenti precedenti sono eguali fra loro e rappresentano i veri momenti d'inerzia, che riescono tutti eguali.

46. Se il sistema non è omogeneo allora le difficoltà delle integrazioni generalmente si fanno assai grandi e mette conto ricorrere all'esperienza, la quale verrà condotta come da noi sarà dettagliatamente spiegato in seguito.

Articolo III.

Elissoide d'inerzia ed elissoide momentale; piani ed assi principali e permanenti.

47. Al § 33 abbiamo veduto che se si dice $m i_h^2$ il momento d'inerzia del sistema rapporto ad una retta la quale formi coi tre assi ortogonali X, Y, Z angoli i cui coseni sieno rispettivamente a, b, c sarà

$$(9) \quad i_h^2 = a^2 i_x^2 + b^2 i_y^2 + c^2 i_z^2 - 2ab i\lambda_{xy} - 2ac i\lambda_{xz} - 2bc i\lambda_{yz}$$

la quale espressione sussiste tanto se l'origine degli assi è nel baricentro del sistema quanto se essa è collocata in un altro punto qualunque del sistema medesimo.

Se ora a partire dall'origine O degli assi si prende sulla retta h una lunghezza inversamente proporzionale ad i_h, cioè una lunghezza $\frac{k^2}{i_h}$ essendo k una costante qualunque, e si dicano x, y, z, le coordinate dell'estremo della retta medesima, sarà

$$a=\frac{1}{k^2}.i_h.x;\quad b=\frac{1}{k^2}.i_h.y;\quad c=\frac{1}{k^2}.i_h.z$$

i quali valori sostituiti nella (9), e dividendo tutto per i_h^2, che riesce fattore comune, si ha

$$(10)\ \frac{i_x^2}{k^4}x^2+\frac{i_y^2}{k^4}y^2+\frac{i_z^2}{k^4}z^2-2\frac{i\lambda_{xy}}{k^4}xy-2\frac{i\lambda_{xz}}{k^4}xz-2\frac{i\lambda_{yz}}{k^4}yz=1$$

la quale rappresenta l'equazione di un elissoide riferito al suo centro, ed essendo indipendente dagli angoli che la retta forma coi tre assi ci dice che se per un punto O qualunque del sistema si spicca un fascio di rette, e sopra ciascuna delle stesse si prenda una lunghezza inversamente proporzionale alla radice del rispettivo momento di inerzia, i capi delle dette rette si troveranno tutti sopra uno stesso elissoide avente il centro nel punto O e per equazione la (10). Questo elissoide si dice l'*elissoide d'inerzia* rapporto al punto O, e l' *elissoide centrale d'inerzia* se il punto O è il baricentro del sistema.

48. Analogo teorema ha luogo pei momenti di inerzia riferiti ai piani, imperocchè se sopra la retta X' § 31 si prenda una lunghezza eguale a $\frac{k^2}{\lambda_{x'}}$ e si dicano x, y, z le coordinate del suo punto estremo, sarà

$$a=\frac{\lambda_{x'}}{k^2}x;\quad a_1=\frac{\lambda_{x'}}{k^2}y;\quad a_2=\frac{\lambda_{x'}}{k^2}z$$

e quindi la (5) diventa

$$(11)\ \frac{\lambda_x^2}{k^4}x^2+\frac{\lambda_y^2}{k^4}y^2+\frac{\lambda_z^2}{k^4}z^2+2\frac{i\lambda_{xy}}{k^4}xy+2\frac{i\lambda_{xz}}{k^4}xz+2\frac{i\lambda_{yz}}{k^4}yz=1$$

la quale, come la (10), rappresenta un'elissoide col centro in O, e ci dice che se pel suo centro si conduce un diametro qualunque la sua lunghezza riescirà inversamente proporzionale alla radice del momento d'inerzia relativo ad un piano perpendicolare al diametro stesso.

49. Siccome riferendo l'elissoide ai suoi tre assi la sua equazione non contiene che i soli termini moltiplicati pei quadrati delle rispettive ordinate, così si scorge che permutando nell'equazione (10) gli assi e prendendo quale nuovo sistema gli assi X'; Y'; Z' diretti secondo i tre assi dell'elissoide stesso devono sparire i tre termini contenenti i prodotti delle ordinate, e quindi deve riescire

$$i\lambda_{x'y'} = o; \quad i\lambda_{x'z'} = o \quad i\lambda_{y'z'} = o$$

donde conchiuderemo che siccome per ciascun punto di un sistema esiste un'elissoide d'inerzia, così per ciascun punto di un sistema esistono tre direzioni rispettivamente ortogonali fra loro che prese quali assi delle coordinate annullano i tre momenti complessi del sistema rapporto ai piani determinati dalle direzioni medesime; di più che tali direzioni sono generalmente soltanto tre, perchè tre soltanto sono gli assi del predetto elissoide.

I piani determinati da queste direzioni, ossia i tre piani diametrali dell'elissoide d'inerzia relativo ad un dato punto, si dicono *piani permanenti* relativi al punto dato, se il punto è qualunque, e *piani principali* se il punto è il baricentro. Così pure i tre assi secondo cui sono diretti i tre assi dell'elissoide d'inerzia si dicono *assi permanenti* rapporto al punto dato, ed *assi principali* se si riportano al baricentro. Tali assi e tali piani godono di importantissime proprietà meccaniche che vedremo in progresso.

50. Supponendo riferito il sistema ai suoi tre assi permanenti, l'equazione dell'elissoide d'inerzia corrispondente diventa

$$(12) \qquad i_x^2 \cdot x^2 + i_y^2 \cdot y^2 + i_z^2 \cdot z^2 = k^4$$

e i tre momenti d'inerzia relativi agli assi stessi si dicono *momenti principali*, e conserveremo loro sempre questo nome tanto se il punto che fissa l'origine è un punto qualunque del sistema quanto se sia il suo baricentro.

Pel § 47 poi si ha che gli assi dell'elissoide sono inversamente proporzionali alla radice del relativo momento, e che quindi i momenti d' inerzia principali godono delle stesse proprietà di cui godono gli assi dell'elissoide; cioè dei tre momenti d'inerzia principali il più grande è un massimo assoluto ed il più piccolo un minimo assoluto; in quanto poi al medio, compreso sempre fra questi due, esso è maggiore di tutti quelli che si riferiscono a rette comprese nello spazio angolare compreso fra le due sezioni circolari dell'elissoide ove si trova l'asse maggiore dell'elissoide stesso, e minore di quelli riferiti a rette comprese nello spazio ove giace l'asse minore dell'elissoide suddetto.

51. Se il sistema è riferito ai suoi tre assi permanenti, allora sarà

$$(13) \qquad i_h^2 = a^2 . i_x^2 + b^2 . i_y^2 + c^2 . i_z^2$$

e quindi se due dei momenti d' inerzia principali sono eguali allora tutti i momenti d'inerzia riferiti a rette che si inclinano egualmente all'asse del momento diseguale sono eguali fra loro. Sia infatti $i_x^2 = i_y^2$ la (13) darà

$$i_h^2 = (a^2 + b^2)\, i_x^2 + c^2 . i_z^2$$

ma è $a^2 + b^2 + c^2 = 1$ quindi sarà

$$i_h^2 = (1 - c^2)\, i_x^2 + c^2 . i_z^2$$

e quindi sono eguali tutti i valori di i_h che corrispondono ad un eguale valore di c; che se tutti e tre i momenti d' inerzia principali sono eguali allora tutti i momenti d'inerzia riferiti a qualunqne retta passante pel punto d'origine sono eguali, imperocchè in tal caso si ha

$$i_h^2 = (a^2 + b^2 + c^2)\, i_x^2$$

53. Se due dei momenti principali sono eguali allora l' elissoide d' inerzia è di rivoluzione intorno all' asse del momento diseguale, e allora tutti gli assi che passano per O e sono per-

pendicolari all'asse del momento diseguale sono permanenti, e permanenti sono il piano che passa pel punto O ed è perpendicolare all'asse del momento diseguale, e tutti i piani che passano pell'asse medesimo.

Se infine tutti e tre i momenti principali sono eguali allora l'elissoide diventa una sfera e tutti i momenti riferiti a qualunque retta passante per O sono eguali; tutti gli assi e tutti i piani pure passanti per O sono permanenti.

54. L'elissoide d'inerzia è reciproco di quello che, riferito ai medesimi assi, ha per equazione

$$(14) \qquad \frac{x^2}{i_x^2}+\frac{y^2}{i_y^2}+\frac{z^2}{i_z^2}=1$$

e noi diremo col prof. Bellavitis quest'ultimo elissoide l'*elissoide momentale*, ed esso ha per reciproco l'elissoide d'inerzia. Siccome l'uso di questi due elissoidi semplifica notabilmente la teoria del moto di rotazione di un sistema, così è mestieri che noi segnalizziamo qui alcune loro relazioni principali che ricaveremo, per facilità dello studioso, secondo i metodi usuali.

55. Se si conduce pel centro O una retta h qualunque, e sieno a, b, c i coseni degli angoli che la sua direzione forma coi tre assi, ed x_1 y_1 z_1 le coordinate del punto P in cui taglia l'elissoide d'inerzia sarà

$$OP=\frac{k^2}{i_h}$$

ed

$$x_1=a.OP; \quad y_1=b.OP; \quad z_1=c.OP$$

Se ora pel punto P conduciamo un piano tangente all'elissoide la sua equazione sarà

$$i_x^2.x_1.x+i_y^2.y_1.y+i_z^2.z_1.z=k^4$$

e se per O si conduca una retta perpendicolare a questo piano, e si dicano x_2, y_2, z_2 le coordinate del punto S in cui essa taglia l'elissoide momentale, ed x_3, y_3, z_3 quelle del punto S_1 in cui incontra il predetto piano sarà

$$x_2=\frac{i_x^2}{k^2}.x_1; \quad y_2=\frac{i_y^2}{k^2}.y_1; \quad z_2=\frac{i_z^2}{k^2}.z_1$$

donde risulta che i punti P ed S sono *affini* essendo le coordinate del secondo quelle del primo moltiplicate pei numeri costanti

$\frac{i_x^2}{k^2}$; $\frac{i_y^2}{k^2}$; $\frac{i_z^2}{k^2}$, e sarà

$$\overline{OS}^2 = \frac{OP^2}{k^4}\left\{ i_x^4 . a^2 + i_y^4 . b^2 + i_z^4 . c^2 \right\}$$

così pure sarà

$$x_3 = \frac{k^4}{OP} \cdot \frac{i_x^2 . a}{\left\{ i_x^4 \cdot a^2 + i_y^4 \cdot b^2 + i_z^4 \cdot c^2 \right\}}; \; y_3 = \frac{k^4}{OP} \cdot \frac{i_y^2 . b}{\left\{ i_x^4 \cdot a^2 + i_y^4 \cdot b^2 + i_z^4 \cdot c^2 \right\}}.$$

$$z_3 = \frac{k^4}{OP} \cdot \frac{i_z^2 \cdot c}{\left\{ i_x^4 . a^2 + i_y^4 . b^2 + i_z^4 . c^2 \right\}}$$

ed

$$OS_1^2 = \frac{k^8}{OP^2} \cdot \frac{1}{\left\{ i_x^4 . a^2 + i_y^4 . b^2 + i_z^4 . c^2 \right\}}$$

donde

$$OS \,.\, OS_1 = k^2$$

cioè è costante il prodotto di OS per OS_1

56. Se x, y, z sono le coordinate di un punto P situato sull'elissoide d'inerzia, le coordinate del corrispondente punto S situato sull'elissoide momentale saranno rispettivamente

$$\frac{i_x^2}{k^2} . x; \qquad \frac{i_y^2}{k^2} . y; \qquad \frac{i_z^2}{k^2} . z$$

e quindi se il punto S descrive l'elisse-sferica che è la curva d'intersezione dell'elissoide momentale colla sfera

$$x^2 + y^2 + z^2 = r^2$$

il punto P descriverà la curva intersezione dell'elissoide polare coll'elissoide

$$i_x^4 \cdot x^2 + i_y^4 . y^2 + i_z^4 . z^2 = r^2 k^4,$$

e se prendiamo $k = r$, cioè k eguale al raggio della sfera sulla quale è situato il punto S, le coordinate di P soddisferanno all'equazione

$$i_x^4 \cdot x^2 + i_y^4 \cdot y^2 + i_z^4 \cdot z^2 = r^6 .$$

Ora il piano tangente in P all'elissoide polare avendo per equazione

$$i_x^2 \cdot x_1 \cdot x + i_y^2 \cdot y_1 \cdot y + i_z^2 \cdot z_1 \cdot z = r^4$$

è soddisfatto dai valori

$$x = \frac{i_x^2}{r^2} \cdot x_1 ; \quad y = \frac{i_y^2}{r^2} \cdot y_1 ; \quad z = \frac{i_z^2}{r^2} \cdot z_1$$

donde si conchiude che passa pel punto S, e che lo stesso avviene per tutti i punti della curva P affine dell'elisse sferica S.

57. La determinazione degli assi permanenti corrispondenti a dato punto O di un sistema è in fondo lo stesso problema di assegnare gli assi di un elissoide di cui è data l'equazione riferita al suo centro, e si farebbe colle medesime norme, ma siccome noi avremo occasione di assegnare una tal direzione partendo invece dalle proprietà meccaniche spettanti ai detti assi, cosi riporteremo a quel punto la soluzione di questo problema.

CAPO III.

Delle quantità di moto di cui è dotato un sistema rigido in movimento. — Centri di giratore minimo e loro proprietà.

Articolo I

Nozioni.

58. Una massa m la quale a un dato istante è dotata di una velocità v in data direzione possiede una quantità di moto mv diretta secondo la v, e la detta quantità di moto rappresenta il

risultamento dell'azione delle cause operanti sulla detta massa durante tutto il tempo che precede l'istante che si considera, e serve a misurare il risultamento finale dell'azione medesima. Per imprimere poi alla massa m la velocità v è necessario di far agire sulla stessa una forza per un certo tempo; durante il quale la velocità della detta massa va successivamente aumentando fino a raggiungere la v, e l'intensità della causa operante dipende dalla massa m, dalla velocità impressa v e dalla durata del tempo della sua azione; ma per quanto spetta all'effetto raggiunto, ossia alla quantità di moto mv comunicata alla massa m, esso può aversi in infinite maniere variando causa e durata della sua azione, e non rappresenta quindi che il risultamento finale dell'azione stessa, e serve a rappresentare il complesso delle azioni che operarono sulla predetta massa precedentemente al dato istante. Il complesso di tali azioni rappresenta quello che dicesi la *forza attuale* posseduta dalla masssa m nell'istante dato, e che forse sarebbe meglio di indicare col nome di *forza complessa*, e questa forza riesce misurata dalla quantità di moto mv che ne è il risultamento finale.

59. In quanto alla forza operante se diciamo *uno* la forza che, conservando sempre la stessa intensità, è capace di ingenerare la velocità *uno* nella massa *uno* agendo sulla stessa per la durata dell'unità di tempo, la forza capace di ingenerare la velocità dv nella massa m agendo sulla stessa durante il tempo infinitesimo dt, nel qual tempo la sua intensità può considerarsi costante, sarà espressa da $m\frac{dv}{dt}$; questa quantità serve a misurarla e dicesi *forza motrice:* la forza acceleratrice si riporta alla massa *uno* e rappresenta la forza capace di ingenerare la velocità dv nella massa *uno* agendo sulla stessa durante il tempo dt.

60. Allo scopo di ridurre tanto le quantità di moto possedute da un sistema rigido quanto le forze operanti sullo stesso al minor numero possibile, per potere più facilmente discuterne gli effetti, giova introdurre lo stesso artificio delle coppie, così luminosamente usato dal Poinsot in primo luogo nella Statica e successivamente eziandio nella teoria del movimento, fondandosi sul principio, per sè evidente, che le condizioni di un

elemento materiale non riescono menomamente alterate se lo stesso si suppone dotato di due quantità di moto eguali e direttamente contrarie, oppure se sullo stesso si suppongano contemporaneamente agire due forze motrici direttamente contrarie e dotate di eguale intensità.

Noi quindi considereremo le coppie di quantità di moto e di forze motrici intendendo per esse l'insieme di due quantità di moto, o di due forze motrici, parallele, eguali, direttamente contrarie ed applicate a due elementi materiali invariabilmente congiunti fra loro. Potendosi sulle predette coppie replicare le medesime considerazioni già fatte nella Statica se ne dedurranno le stesse conseguenze, che cioè il loro effetto dipende unicamente dalla direzione del piano in cui giacciono e dal loro momento, e che quindi possono in ogni caso rappresentarsi mediante una retta di limitata lunghezza, perpendicolare al detto piano e proporzionale al detto momento, convenendo, pel senso, che supposto fermato il punto di mezzo della coppia e attribuiti alla retta piedi e capo se l'osservatore si pone in coincidenza colla retta stessa, piedi con piedi e capo con capo, veda succedere la rotazione dalla sua sinistra anteriormente alla sua diritta.

La retta che rappresenta l'effetto della coppia che si considera, e quindi l'effetto stesso, noi la diremo il *giratore* corrispondente alla coppia data, e sarà *giratore di quantità di moto*, o *giratore acceleratore* secondo che la coppia è una coppia di quantità di moto o una coppia di forze acceleratrici.

61. In egual modo replicando le considerazioni fatte nella Statica sarà facile il pervenire alle medesime conseguenze, che qui riproduco per l'uso continuo che faremo delle stesse nel progresso delle nostre ricerche.

Una quantità di moto posseduta da un elemento materiale qualunque di un sistema può trasportarsi in un altro punto del sistema medesimo, o invariabilmente congiunto al sistema, senza alterarne l'effetto, purchè si tenga conto del giratore di quantità di moto che nasce da questo trasporto. Lo stesso si dica di una forza motrice operante sopra un punto qualunque che può trasportarsi in altro punto, invariabilmente congiunto col primo, purchè si tenga conto del giratore accceleratore prodotto dal trasporto.

Un giratore tanto di quantità di moto quanto acceleratore può trasportarsi parallelamente a se stesso e condurlo a passare per qualunque punto si voglia del sistema senza che il suo effetto riesca menomamente alterato.

Le quantità di moto, le forze motrici, i giratori di quantità di moto e i giratori acceleratori si compongono insieme seguendo le stesse norme che valgono per la composizione statica delle forze.

Articolo II.

Delle quantità di moto di cui è dotato un sistema rigido che si muove unicamente di moto di trasporto.

62. Quando il moto del corpo è semplicemente moto di traslazione allora tutti i suoi elementi materiali si muovono così che ad ogni singolo istante gli elementi simultanei delle curve da loro descritte sono eguali e paralleli fra loro; se quindi diciamo v la velocità della traslazione alla fine del tempo t, velocità che è comune a tutti gli elementi del sistema, un elemento generico di massa Δm possederà una quantità di moto $v.\Delta m$ diretta parallelamente alla traslazione; e siccome tutte le quantità di moto possedute dai vari elementi sono parallele e proporzionali alle rispettive masse degli elementi stessi, così la loro risultante eguaglierà la loro somma, sarà parallela alla traslazione e passerà pel centro delle masse, che è il baricentro del sistema. La quantità di moto totale sarà dunque

$$\Sigma v.\Delta m = m\,.\,v\,,$$

passerà pel baricentro e sarà diretta parallelamente alla traslazione.

63. Inversamente facendo agire sopra un sistema rigido una forza capace di ingenerare una quantità di moto $\mu.u$ e passante pel baricentro, per l'azione della forza stessa il sistema concepirà un moto di trasporto parallelo alla direzione della forza, e la cui velocità v sarà data dalla

$$v = \frac{\mu.u}{m}$$

In tal caso quindi l'effetto della forza è unicamente quello di trasportare tutti gli elementi del corpo così che ciascuno descriva curve eguali e parallele, ed eguali e parallele a quelle che descriverebbe il baricentro animato dalla stessa forza e supposta in esso concentrata la massa tutta del corpo.

Il semplice moto di trasporto è dunque regolato dalle stesse leggi che determinano il moto dei punti materiali.

Articolo III.

Delle quantità di moto di cui è dotato un sistema rigido che ruota intorno ad un asse.

64. Abbiasi un sistema rigido il quale ruoti intorno a dato asse O, e sia w la sua velocità angolare alla fine del tempo t. Si riferisca il sistema a tre assi ortogonali così che l'origine sia nel baricentro e che l'asse delle Z sia parallelo all'asse di rotazione; sieno a e b le coordinate del punto in cui l'asse di rotazione attraversa il piano XY e, conformemente alla convenzione adottata, la rotazione avvenga da X verso Y. Si consideri un elemento materiale di coordinate x, y, z, sia Δm la sua massa e ρ la sua distanza dall'asse di rotazione; ruotando il sistema intorno all'asse O il punto x, y, z descrive un cerchio il cui piano è parallelo al piano XY, avente il centro sull'asse e per raggio ρ, quindi alla fine del tempo t l'elemento Δm avrà una velocità assoluta $\rho.w.$ diretta perpendicolarmente al piano che passa pel punto x, y, z e per l'asse, e possederà una quantità di moto $\rho.w.\Delta.m$ nella medesima direzione: a questa quantità di moto si possono sostituire le due $w(y-b)\Delta m$ parallela all'asse X ed in senso contrario all'asse stesso, e la $w(x-a)\Delta m$ parallela e nello stesso senso di Y; e, per quanto si è detto all'articolo primo, queste possono essere rimpiazzate da due quantità di moto eguali alle precedenti ma passanti invece per un punto qualunque di coordinate x_o, y_o, z_o, e dal giratore di quantità di moto che è risultante dei tre $w(x-a)(z-z_o)\Delta m$ parallelo ed opposto ad X; $w(y-b)(z-z_o)\Delta m$ parallelo ed opposto ad Y; ed $w(y-b)(y-y_o)\Delta m + w(x-a)(x-x_o)\Delta m$ parallelo e diretto nello stesso senso dell'asse Z.

Eseguendo una simile riduzione per tutte le quantità di moto di cui sono dotati tutti gli elementi materiali costituenti il sistema, e componendo quindi le quantità di moto ed i giratori avremo che le quantità di moto di cui è dotato il sistema alla fine del tempo t sono riducibili al seguente sistema di quantità di moto e di giratori di quantità di moto;

una quantità di moto $m\,w\,b$ passante pel punto x_o, y_o, z_o parallela e diretta nello stesso senso di X;
una quantità di moto $m\,w\,a$ passante pel punto x_o, y_o, z_o parallela e diretta in senso opposto ad Y;

un giratore di qnantità di moto $mw\{i\lambda_{xz}+a z_o\}$ parallelo ed opposto ad X;
un giratore di quantità di moto $mw\{i\lambda_{yz}+b z_o\}$ parallelo ed opposto ad Y;
un giratore di quantità di moto $mw\{i_z^2+b y_o+a x_o\}$ parallelo e diretto nello stesso senso di Z;

che si compongono in un'unica quantità di moto ed in un unico giratore colle solite norme.

65. Se diciamo r la distanza del baricentro dall'asse di rotazione, le due quantità di moto mwb ed mwa manifestamente si riducono all'unica quantità di moto mwr diretta perpendicolarmente al piano che passa per l'asse di rotazione e pel baricentro ed in senso opposto a quello secondo cui avviene la rotazione, cioè nel quadrante delle y negative. In essa non entrano le coordinate del punto a cui si trasportano le singole quantità di moto, e quindi essa resta sempre la stessa qualunque sia questo punto, la cui posizione non ha influenza che sopra il solo giratore a cui si possono sempre ridurre i tre trovati nel precedente paragrafo. La quantità di moto risultante è dunque la stessa qualunque sia il punto per cui si faccia passare, ma il giratore di quantità di moto, che insieme con essa rappresenta il sistema totale delle quantità di moto, o della forza attuale, di cui è dotato il sistema alla fine del tempo t, varia al variare del detto punto con legge rappresentata dalle tre ultime espressioni del precedente paragrafo.

66. Se il punto per cui si fa passare la quantità di moto ri-

sultante è il baricentro allora, essendo $x_0 = y_0 = z_0 = o$ i tre giratori si riducono rispettivamente ai tre $m\,w\,i\lambda_{xz}$, $m\,w\,i\lambda_{yz}$, $m\,w\,i_z^2$, i quali essendo indipendenti da a e da b, si scorge che quando la quantità di moto risultante si faccia passare pel baricentro del sistema allora il giratore che insieme con essa rappresenta il sistema delle quantità di moto di cui è dotato il corpo è indipendente dalla posizione assoluta dell'asse di rotazione e dipende unicamente dalla sua direzione.

Detto in tal caso $m\,G$ il giratore risultante sarà

$$(15)\left\{\begin{aligned} & m\,G = m\,w\sqrt{\{i\lambda_{xz}\}^2 + \{i\lambda_{yz}\}^2 + \{i_z^2\}^2} \\ & \cos\widehat{A\,X} = -\frac{w.i\lambda_{xz}}{G};\ \cos\widehat{A\,Y} = -\frac{w.i\lambda_{yz}}{G};\ \cos.\widehat{A\,Z} = \frac{w.i_z^2}{G} \end{aligned}\right.$$

67. Giovandosi dell'arbitrio concesso di far passare la quantità di moto risultante per qual punto più ci aggrada, possiamo farla passare per tal punto per cui il giratore riesca il più piccolo possibile, e a quest'uopo i soliti criterii ci somministreranno per la determinazione di questo punto le equazioni

$$(16)\quad i_z^2 + a.x_0 + b.y_0 = o; \qquad a.i\lambda_{xz} + b.i\lambda_{yz} + r^2.z_0 = o$$

le quali rappresentano una retta perpendicolare al piano che passa per l'asse di rotazione e pel baricentro e situata ad una distanza dal piano XY data dalla

$$z_0 = -\frac{a.i\lambda_{xz} + b.i\lambda_{yz}}{r^2}$$

Detto poi $m\,G_m$ il giratore minimo sarà

$$(17)\quad\left\{\begin{aligned} & m\,G_m = m\,w.\frac{a.i\lambda_{yz} - b.i\lambda_{xz}}{r} \\ & \cos.\widehat{G_m X} = \frac{b}{r};\ \cos\widehat{G_m Y} = -\frac{a}{r} \end{aligned}\right.$$

cioè esso sarà parallelo e diretto nello stesso senso della quantità di moto risultante.

68. Se diciamo *centro di giratore minimo* quel punto del piano che passa per l'asse di rotazione e pel baricentro del sistema pel quale deve passare la quantità di moto risultante perchè il giratore di quantità di moto, che insieme ad essa rappresenta la quantità di moto del sistema, sia minimo, dovendo questo punto essere il punto d'incontro della retta rappresentata dalle **(16)** col piano

$$a \cdot y - b \cdot x = o$$

che passa per l'asse e pel baricentro, sarà

$$(18) \qquad x_o = -\frac{a \cdot i_z^2}{r^2}\,; \quad y_o = -\frac{b \cdot i_z^2}{r^2}\,; \quad z_o = -\frac{a\, i\lambda_{xz} + b\, i\lambda_{yz}}{r^2}$$

Così pure se diciamo x_r; y_r; z_r le coordinate della proiezione del centro di giratore minimo sull' asse di rotazione sarà

$$(19) \qquad x_r = a\,; \quad y_r = b\,; \quad z_r = -\frac{a \cdot i\lambda_{xz} + b \cdot i\lambda_{yz}}{r^2}$$

Questo punto dell'asse di rotazione sarà distinto da noi col nome di *centro di rotazione.*

69. Se l'asse di rotazione giace nel piano passante pel baricentro che ha per equazione

$$(20) \qquad i\lambda_{yz} \cdot x - i\lambda_{xz} \cdot y = o$$

dovendo a e b soddisfare l'equazione di questo piano, qualunque sia r, sarà $G_m = o$; cioè qualunque sia la direzione degli assi di rotazione esiste sempre un sistema di assi di rotazione, paralleli alla direzione data e giacenti tutti in un medesimo piano passante pel baricentro del sistema, per cui il giratore di quantità di moto si annulla tutte le volte che la quantità di moto si conduca a passare per quel punto del piano stesso che è il centro di giratore minimo corrispondente alla direzione data degli assi, e pei quali quindi è possibile di ricondurre tutte le quantità di moto, di cui a un dato istante è dotato il sistema, ad una unica quantità di moto.

In questo caso il *centro di giratore minimo* diventa *centro di giratore nullo,* ed è il punto che venne fin'ora indicato col nome di *centro di percossa.*

70. Così pure qualunque sia il piano passante pel baricentro esiste sempre una direzione per cui tutti gli assi di rotazione giacenti in quel piano e paralleli alla stessa sono assi a centro di giratore nullo.

Infatti riferito il sistema ad assi X e Z passanti pel baricentro e presi comunque in qual piano, se diciamo φ l'angolo che l'asse Z' parallelo ai nuovi assi di rotazione forma con Z sarà

$$x' = x . \cos\varphi + z . \operatorname{sen}\varphi ; \quad y' = y ; \quad z' = z . \cos\varphi - x . \operatorname{sen}\varphi$$

ed essendo in questo caso $b = o$ dovrà essere

$$i\lambda_{y'z'} = o$$

ora è

$$i\lambda_{y'z'} = i\lambda_{yz} . \cos\varphi - i\lambda_{xz} . \operatorname{sen}\varphi.$$

basterà dunque prendere φ così che sia

$$(21) \qquad \operatorname{tang}\varphi = \frac{i\lambda_{yz}}{i\lambda_{xz}}$$

dunque, ecc.

Articolo IV.

Proprietà fondamentali dei centri di giratore minimo e dei centri di rotazione.

71. Eliminando fra le equazioni (18) dell'articolo precedente le quantità a e b si avrà

$$(22) \qquad i_z^2 . z_o - i\lambda_{xz} . x_o - i\lambda_{yz} . y_o = o$$

la quale ci dice che

« i centri di giratore minimo corrispondenti ad assi di rotazione paralleli fra loro stanno tutti in un medesimo piano passante pel baricentro del sistema, e perpendicolare al piano degli assi a giratore nullo paralleli agli stessi. »

Imperocchè evidentemente il piano (22) è perpendicolare al piano (20).

72. Essendo

$$i_x^2 . x^2 + i_y^2 . y^2 + i_z^2 . z^2 - 2 i\lambda_{xy} . xy - 2 i\lambda_{xz} . xz - 2 i\lambda_{yz} . yz = k^4$$

l'equazione dell'elissoide centrale d'inerzia riferita agli assi X, Y, Z, ed

$$i_z^2 . z - i\lambda_{xz} . x - i\lambda_{yz} . y = \frac{k^2}{2} . i_z^2$$

quella del suo piano targente nel punto dove è attraversata dall'asse Z, cioè nel punto di coordinate

$$x = o ; \qquad y = o ; \qquad z = \frac{k^2}{i_z^2},$$

così

« il piano dei centri di giratore minimo corrispondente a data direzione di assi è il piano diametrale dell'elissoide d'inerzia coniugato col diametro parallelo alla direzione degli assi stessi ».

73. Se per semplicità prendiamo per piano XZ il piano che passa per l'asse di rotazione e pel baricentro del sistema sarà $b = o$; $a = r$ e le coordinate del centro di giratore minimo e del centro di rotazione saranno

$$(23) \quad x_o = -\frac{i_z^2}{r} ; \; z_o = -\frac{i\lambda_{xz}}{r} ; \; x_r = r ; \; z_r = -\frac{i\lambda_{xz}}{r}$$

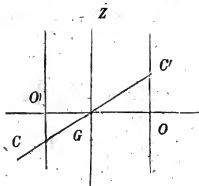
dalle quali ricaveremo

$$(24) \qquad z_o = \frac{i\lambda_{xz}}{i_z^2} x_o ; \qquad x_r . z_r = - i\lambda_{xz}$$

le quali ci dicono che

« i centri di giratore minimo corrispondenti ad assi paralleli fra loro e giacenti in un medesimo piano passanti pel baricentro giacciono tutti sopra una medesima retta passante pel baricentro » come d'altra parte era evidente pel § 71; e che

« i centri di rotazione corrispondenti ad assi paralleli fra loro e giacenti in un medesimo piano passante pel baricentro stanno

sopra un' iperbole equilatera avente il centro nel baricentro e per assintoti la retta parallela e la retta perpendicolare alla direzione degli assi stessi ».

74. Il piano della figura rappresenti il piano degli assi di rotazione paralleli a Z che hanno CC' per linea dei centri di giratore minimo; sia C il centro di giratore minimo corrispondente all'asse O; G il baricentro ed x_1, z_1 le coordinate del centro di giratore minimo corrispondente all' asse O' condotto per C parallelamente all'asse O; sarà

$$x_1 = -\frac{i_z^2}{-GO'} = GO; \quad z_1 = -\frac{i\lambda_{xz}}{-GO'} = \frac{GO.CO'}{GO'}$$

quindi

« il centro di giratore minimo corrispondente ad asse O' parallelo all'asse O e passante pel centro di giratore minimo corrispondente ad O è situato sopra quest'asse e precisamente nel punto C' dove esso è tagliato dalla retta luogo dei centri di giratore minimo corrispondente ad essi paralleli allo stesso. »

Quindi anche

« Gli assi di rotazione paralleli fra loro e giacenti in un medesimo piano passante pel baricentro del sistema sono coniugati a due a due così che il centro di giratore minimo dell' uno stà sopra dell'altro ».

75. Se diciamo α l'angolo che la retta lungo dei centri di giratore minimo corrispondente ad assi paralleli a Z e giacenti in

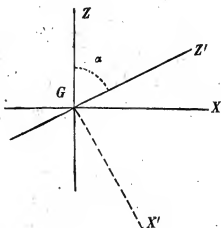
un medesimo piano passante pel baricentro fa colla direzione Z degli assi stessi, essendo

$$GO \, . \, GO' = - \, i_z^2 ; \qquad \operatorname{sen} \alpha = \frac{GO}{GC'} = \frac{GO'}{GC}$$

si avrà

$$GC \, . \, GC' = - \, \frac{i_z^2}{\operatorname{sen}^2 \alpha}$$

e siccome i_z^2 ed α pei detti assi sono costanti così

« Il rettangolo formato colle distanze di due centri di giratore minimo coniugati fra loro dal baricentro del sistema è costante. »

76. Se GZ' rappresenta la retta luogo dei centri di giratore minimo corrispondente ad assi giacenti in uno stesso piano passante pel baricentro e parallelli a Z sarà GZ la retta luogo dei centri di giratore minimo corrispondente ad assi giacenti nel medesimo piano e paralleli a GZ'.

Detto infatti α l'angolo che GZ' forma con GZ ed α' l'angolo che la retta luogo dei centri di giratore minimo degli assi pa-

ralleli a Z' forma, con GZ', prendendo per nuovi assi Z' ed X' normale a Z' sarà

$$\text{tang}\,.\,\alpha = \frac{i_z^2}{i\lambda_{xz}}; \qquad \text{tang}.\,\alpha' = \frac{i_{z'}^2}{i\lambda_{x'z'}}.$$

Posto per brevità

$$h^4 = i_z^4 + (i\lambda_{xz})^2$$

sarà

$$\text{sen}\,\alpha = \frac{i_z^2}{h^2}; \qquad \cos\alpha = \frac{i\lambda_{xz}}{h^2}$$

e quindi

$$x' = \frac{i\lambda_{xz}}{h^2}\cdot x - \frac{i_z^2}{h^2}\cdot z\,;\; y' = y\,;\; z' = \frac{i_z^2}{h^2}\cdot x + \frac{i\lambda_{xz}}{h^2}\cdot z$$

donde

$$i_{z'}^2 = \frac{i_z^2}{h^4}\left\{ i_x^2 . i_z^2 - (i\lambda_{zx})^2 \right\};\; i\lambda_{x'z'} = -\frac{i\lambda_{xz}}{h^4}\left\{ i_x^2 . i_z^2 - (i\lambda_{xz})^2 \right\}$$

e quindi

$$\text{tang}\,\alpha' = -\frac{i_z^2}{i\lambda_{xz}} = -\text{tang}\,.\,\alpha$$

ed

$$\alpha + \alpha' = 180°$$

donde ecc.

Dunque

« La retta luogo dei centri di giratore minimo e la retta rappresentante la corrispondente direzione degli assi di rotazione sono coniugate fra loro, così che l'una è luogo dei centri di giratore minimo corrispondente ad assi di rotazione paralleli all'altra. »

77. Se ora consideriamo un fascio degli assi di rotazione pas-

santi tutti per uno stesso punto e fra questi vogliamo sceverare quelli che hanno il loro centro di rotazione nel punto stesso troveremo che

« Tutti gli assi di rotazione i quali hanno il loro centro di rotazione in un punto dato stanno sopra un cono del terzo ordine la cui intersezione fatta con un piano perpendicolare alla retta che congiunge il punto dato col baricentro è una curva del terzo ordine inversa di se stessa, il cui centro di inversione è il punto in cui il piano taglia la retta predetta ».

Si conduca infatti pel punto dato e pel baricentro una retta e presa questa per asse delle X si riferisca il sistema al piano XZ degli assi di rotazione paralleli a Z a giratore nullo, e si coordini allo stesso gli assi Z ed Y. Si consideri il piano che fa col piano precedente l'angolo φ e sia θ l'angolo che l'asse di rotazione che in questo piano ha il suo centro di rotazione nel punto dato forma con X, e sia a la distanza di questo punto dal baricentro. Per quanto ci è detto precedentemente dovrà essere

$$(25) \qquad a^2 . \operatorname{sen} \theta . \cos \theta = - i \lambda_{x'z'} ;$$

ora è

$$(26) \qquad \begin{cases} x' = x . \operatorname{sen} \theta - \{z . \cos \varphi - y . \operatorname{sen} \varphi\} \cos \theta \\ y' = z . \operatorname{sen} \varphi + y . \cos \varphi \\ z' = x . \cos \theta + \{z . \cos \varphi - y . \operatorname{sen} \varphi\} \operatorname{sen} \theta \end{cases}$$

dai quali formatosi $i\lambda_{x'z'}$ e sostituitolo nella precedente avremo tosto.

$$(27) \quad \operatorname{tang} . 2 \theta = \frac{2 \{ i\lambda_{xz} . \cos \varphi - i\lambda_{xy} . \operatorname{sen} \varphi \}}{\{a^2 + i_z^2 - i_x^2\} \cos^2 \varphi + \{a^2 + i_y^2 - i_x^2\} \operatorname{sen}^2 \varphi}$$

Siccome il valore di *tang*. 2θ non muta nè in grandezza nè in segno se si scrive $90^0 + \theta$ in luogo di θ così si scorge che se per x si conduce un piano qualunque esso taglia il predetto cono lungo l'asse X e lungo due generatrici rispettivamente perpendicolari fra loro; se quindi il cono stesso viene tagliato da un piano perpendicolare all'asse X la sua intersezione col

detto piano sarà una curva del terzo ordine inversa di se stessa, avente il suo centro di inversione nel punto dove il detto piano secante taglia l'asse X. La curva che ne nasce formasi da un'ovale chiusa e da un tratto continuo con due flessi e con rami iperbolici verso il terzo flesso, giacendo l'assintoto fra i due pezzi dei quali si compone la curva; essa ammette un diametro ma obliquo all'assintoto; appartiene alla famiglia V sottofamiglia β della classificazione del Bellavitis.

78. Fra le generatrici del cono si trova anche la retta che passa pel punto dato e pel baricentro, ma essa non rappresenta altro che un asse di rotazione che passa pel punto dato, ma che, passando pel baricentro, avrebbe il suo centro di rotazione collocato a distanza infinita, ossia non avrebbe centro di rotazione propriamente detto. Essa, per analogia, potrebbesi denominare il limite degli assi di rotazione passanti pel punto dato: soddisfa alla questione geometrica ma non alla questione meccanica e va esclusa dalla soluzione.

79. Dalle formule (23) risulta che quanto più l'asse di rotazione si avvicina al baricentro e tanto più si dilunga il centro di giratore minimo, il quale va a cadere a distanza infinita per asse passante pel baricentro stesso. Ciò vuol dire che gli assi passanti pel baricentro non hanno propriamente centro di giratore minimo, e quindi fanno una classe a sè essenzialmente distinta dalle altre. Ciò si scorge anche dall'osservare che se l'asse di rotazione passa pel baricentro, essendo $r=o$, la quantità di moto risultante è zero, quindi resta solo il giratore di quantità di moto a rappresentare in tal caso tutte le quantità di moto da cui è animato il sistema, e questo non può essere alterato dal trasportare le singole quantità di moto in altro punto qualunque del sistema.

Articolo V.

Riduzione delle quantità di moto di cui è dotato a un dato istante un sistema rigido che si muove comunque al minor numero possibile.

80. Abbiasi un sistema rigido dotato a un dato istante di una traslazione con velocità v e di una rotazione con velocità angolare w intorno a dato asse O; riferito il sistema a tre assi passanti pel baricentro così che l'asse Z sia parallelo all'asse O e che il piano XZ passi per l'asse di rotazione, tutte le quantità di moto di cui è dotato il sistema si ridurranno ad una quantità di moto mv passante pel baricentro e diretta parallelamente alla traslazione, ad una quantità di moto mwr perpendicolare al piano che passa per l'asse di rotazione e pel baricentro, piano XZ, diretta in senso opposto alle y e passante per un punto qualunque x_o, z_o del detto piano, più ad un giratore di quantità di moto risultante dei tre $mw\{i\lambda_{xz} + r \,.\, x_o\}$ parallelo ed opposto ad X, $mw.i\lambda_{yz}$ parallelo ed opposto ad Y, ed $mw\{i_z^2 + r \,.\, x_o\}$ parallelo e diretto nello stesso senso di Z. A quest'ultimo giratore possono poi sostituirsi due quantità di moto eguali, parallele e direttamente contrarie, situate nel piano perpendicolare allo stesso e tali che il prodotto di una delle quantità di moto componenti per la distanza loro eguagli il giratore che rappresenta la coppia, e che di più sieno così dirette che il senso della rotazione sia quello indicato dal giratore. In ultima analisi avremo quattro quantità di moto, le due mv, mwr e le due rappresentate dal giratore.

81. Per ridurre un tale sistema a due quantità di moto soltanto basterà ridurre le quantità di moto corrispondenti alla rotazione al baricentro, e allora facendo passare per questo stesso punto una delle quantità di moto costituenti il giratore comporre questa colle due mwr ed mv: con ciò avremo il sistema di due uniche quantità di moto, l'una passante pel baricentro

e l'altra giacente nel piano perpendicolare al giratore corrispondente al baricentro, cioè giacente nel piano luogo dei centri di giratore minimo corrispondente alla direzione dell' asse di rotazione, e che passerà quindi per uno dei punti della retta luogo dei centri di giratore minimo corrispondente ad assi paralleli all'asse dato e giacenti con esso in un medesimo piano passante pel baricentro. Potendosi poi girare la coppia nel suo piano comunque ed alterare a volontà quantità di moto e braccio, purchè resti costante il loro prodotto, così la precedente riduzione potrà farsi in infinite maniere, fra le quali potremo sempre scegliere quella che più torni opportuna pel genere di ricerche che ci proponiamo di intraprendere.

82. Quando la risultante delle due quantità di moto mv ed mwr giaccia nel piano luogo dei centri di giratore minimo corrispondente ad assi di rotazione paralleli all'asse dato, allora si potrà prendere una delle quantità di moto costituenti la coppia, rappresentata dal giratore, eguale e direttamente opposta alla risultante stessa; con ciò si annullerà la quantità di moto passante pel baricentro e tutte le quantità di moto dalle quali è animato il sistema si ridurranno ad un'unica quantità di moto, parallela alla risultante delle due mwr ed mv e passante per un punto della retta luogo dei centri di giratore minimo corrispondente all'asse dato di rotazione. Egli è poi evidente non potersi le dette quantità di moto ridurre ad una soltanto che in questo caso, perchè dovendosi ridurre tutte le quantità di moto dovute alla rotazione al baricentro, per comporle quivi colla mv, il giratore risultante è perpendicolare al piano luogo dei centri di giratore minimo corrispondente ad assi paralleli all'asse dato di rotazione, e la coppia rappresentata dal giratore giace quindi in questo piano.

83. Se diciamo v_x, v_y, v_z le tre componenti della velocità assoluta di traslazione secondo i tre assi, dovendo la risultante delle mwr ed mv giacere nel piano luogo dei centri di giratore minimo corrispondenti ad assi paralleli a Z, dovrà essere soddisfata l'equazione § 71

$$(28) \qquad i_z^2 \cdot v_z - i\lambda_{yz}\{ v_y - wr \} + i\lambda_{xz} \cdot v_x = o$$

e se diciamo a_x; a_y; a_z le coordinate correnti della retta se-

condo cui opera l' unica risultante delle quantità di moto, per giacere essa nel piano suddetto, dovrà essere

$$(29) \qquad i_z^2 \,.\, a_z - i\lambda_{yz} \,.\, a_y - i\lambda_{xz} \,.\, a_x = o$$

e per l'eguaglianza dei giratori componenti dovranno verificarsi le

$$(30) \qquad \begin{cases} v_z \,.\, a_y - (v_y - w\,r)\, a_z + w \,.\, i\lambda_{xz} = o \\ v_x \,.\, a_z - v_z \,.\, a_x + w \,.\, i\lambda_{yz} = o \\ (v_y - w\,r) a_x - v_x \,.\, a_y - w \,.\, i_z^2 = o \end{cases}$$

Da queste ricaveremo per le equazioni rappresentative della retta secondo cui opera l' unica risultante delle quantità di moto

$$(31) \qquad \begin{cases} a_z = \dfrac{v_z}{a_x} \,.\, a_x - \dfrac{w \,.\, i\lambda_{yz}}{v_x} \\ a_y = \dfrac{i\lambda_{yz}}{i\lambda_{xz}} \,.\, \dfrac{v_y + w\,r}{v_x} \,.\, a_x - \dfrac{w \,.\, i_z^2}{v_x} \end{cases}$$

indicando quindi con x_1; z_1 le coordinate del punto in cui essa incontra la retta luogo dei centri di giratore minimo corrispondente all'asse dato di rotazione sarà per la (27)

$$(32) \qquad x_1 = w \,.\, \frac{i_z^2}{v_y - w\,r}\,; \qquad z_1 = w \frac{i\lambda_{xz}}{v_y - w\,r}$$

e detta mU l'unica quantità di moto sarà

$$(33) \qquad \begin{cases} m\,U = m\,\sqrt{\left\{ v_x^2 + (v_y - w\,r)^2 + v_z^2 \right\}} \\ \cos.\, \widehat{UX} = \dfrac{v_x}{U}\,; \; \cos.\, \widehat{UY} = \dfrac{v_y - w\,r}{U}\,; \; \cos.\, \widehat{UZ} = \dfrac{v_z}{U} \end{cases}$$

83. Se la traslazione avviene parallelamente all' asse di rotazione allora sarà $v_x = o$, $v_y = o$ e perchè tutte le quantità di moto sieno riducibili ad una soltanto dovrà essere per la (27)

$$(34) \qquad v_z = -w\,r \,.\, \frac{i\lambda_{yz}}{i_z^2}$$

e sarà in tal caso

$$(35)\quad \begin{cases} m\,U = m\,w\,r\,.\,\sqrt{1+\left\{\frac{i\lambda_{yz}}{i_z^2}\right\}^2} \\ \cos.\widehat{UX} = o;\ \cos.\widehat{UY} = -\frac{1}{\sqrt{1+\left\{\frac{i\lambda_{yz}}{i_z^2}\right\}^2}}; \\ \cos.\widehat{UZ} = -\frac{i\lambda_{yz}}{i_z^2\sqrt{1+\left\{\frac{i\lambda_{yz}}{i_z^2}\right\}^2}} \\ x_1 = -\frac{i_z^2}{r}; \qquad z_1 = -\frac{i\lambda_{xz}}{r} \end{cases}$$

cioè l' unica quantità di moto passerà pel centro di giratore minimo corrispondente all'asse dato di rotazione, starà nel piano perpendicolare al piano che passa per l'asse stesso e pel baricentro, e parallelo all'asse di rotazione, e formerà coll'asse di rotazione un angolo dato dalla

$$(36)\qquad \text{tang}\,.\,\widehat{UZ} = -\frac{i_z^2}{i\lambda_{yz}}$$

84. Se il sistema è dotato di una rotazione w intorno l'asse O e di una traslazione v parallela al detto asse ma non sia soddisfatta la (33) allora le quantità di moto non saranno più riducibili ad una soltanto, ma potranno sempre ridursi a due l'una passante pel baricentro e parallela all' asse di rotazione, e l' altra passante pel centro di giratore minimo nella seguente maniera.

Si riducano le quantità di moto dovute alla rotazione al centro di giratore minimo corrispondente all' asse dato ed avremo al detto punto una quantità di moto mwr parallela ed opposta ad Y, ed un giratore $mw.i\lambda_{yz}$ pure parallelo ed opposto ad Y. A questo giratore si sostituiscano due quantità di moto

$$(37)\qquad m\,w\,r\,.\,\frac{i\lambda_{yz}}{i_z^2}$$

l'una applicata al centro di giratore minimo parallela ed op-

posta a Z, e l'altra applicata al baricentro del sistema e diretta secondo Z. Componendo la prima con mwr si avrà al centro di giratore minimo la quantità di moto

$$(38) \qquad m\,U = m\,w\,r\,.\,\sqrt{1 + \left\{\frac{i\lambda_{yz}}{i_z^2}\right\}^2}$$

situata come la $m\,U$ del paragrafo precedente, e l'altra eguale alla (36) applicata al baricentro e parallela a Z; se a questa aggiungiamo la quantità di moto mv dovuta alla traslazione avremo che il sistema delle quantità di moto sarà ridotto alla $m\,U$ ed ed alla

$$(39) \qquad m\,V = m\,w\,r\left\{\frac{i\lambda_{yz}}{i_z^2} + \frac{v}{w\,r}\right\}$$

passante pel baricentro e diretta parallelamente all' asse di rotazione.

85. Da quanto abbiamo detto risulta che se si facciano agire sopra il sistema due forze, l'una applicata al baricentro, diretta nel senso dell' asse Z e capace di ingenerare nel sistema la quantità di moto $m\,V$; l'altra passante pel centro di giratore minimo corrispondente ad asse O parallelo a Z; diretta come si è detto della $m\,U$, per la loro simultanea azione il sistema concepirà due movimenti; l'uno di rotazione intorno all' asse O con velocità angolare w data dalla

$$(40) \qquad w = \frac{U}{r\,.\,\sqrt{1 + \left\{\frac{i\lambda_{yz}}{i_z^2}\right\}^2}}$$

l'altro di traslazione parallelo all'asse di rotazione con velocità assoluta

$$(41) \qquad v = V - \frac{U\,.\,\frac{i\lambda_{yz}}{i_z^2}}{\sqrt{1+\left\{\frac{i\lambda_{yz}}{i_z^2}\right\}^2}}$$

che se si faccia agire soltanto la forza capace di ingenerare la

quantità di moto $m\,U$, allora il sistema concepirà la rotazione w data dalla (39) e la traslazione

$$(42) \qquad v = -\,U\,.\,\frac{i\lambda_{yz}}{i_z^2\sqrt{\left\{1+.\left\{\frac{i\lambda_{yz}}{i_z^2}\right\}^2\right\}}}$$

86. Dopo ciò possiamo assai facilmente determinare il moto che concepirà un corpo sollecitato da una forza data capace di ingenerare nel corpo stesso una determinata quantità di moto mU. Infatti, data la direzione della forza, faremo passare per la forza stessa e pel baricentro un piano e determineremo la direzione Z degli assi per cui questo piano è luogo dei centri di giratore minimo § 72; ciò fatto per la direzione della forza si farà passare un piano parallelo a Z e pel baricentro G si condurrà l'asse X perpendicolare a questo piano e per X e Z si condurrà un piano il quale taglierà il piano passante per la forza e pel baricentro lungo una retta, che sarà la retta luogo dei centri di giratore minimo corrispondenti ad assi giacenti nel piano XZ e paralleli a Z, e incontrerà la direzione della forza in un punto C, che sarà il centro di giratore minimo corrispondente all'asse intorno cui avviene la rotazione. Dato C si assegnerà l'asse O coniugato con esso, e il corpo concepirà una rotazione w intorno all'asse O data dalla (39) ed una traslazione parallela all'asse Z con velocità v data dalla (41).

CAPO IV.

Della reazione prodotta dall'inerzia (forze centrifughe) e degli assi permanenti e principali.

Articolo I.

Riduzione della reazione prodotta dall'inerzia ad un'unica forza motrice e ad un unico giratore motore.

87. Ciascun elemento materiale di un corpo il quale, pei legami che lo congiungono agli altri, è obbligato a deviare dalla direzione rettilinea e muoversi in curva, per l'inerzia della materia, reagisce con uno sforzo che è diretto secondo la normale alla curva descritta ed è proporzionale alla sua massa, al quadrato della sua velocità assoluta ed in ragione inversa del raggio di curvatura. Un tale sforzo dicesi *forza centrifuga* per la tendenza del punto materiale a discostarsi dal centro di curvatura, ma rappresenta propriamente la reazione prodotta dall'inerzia, e potrebbe più propriamente dirsi *reazione dell'inerzia.* Se diciamo m la massa dell'elemento materiale, v la sua velocità assoluta e ρ il raggio di curvatura, la reazione dell' inerzia valutata in forza motrice coll'elemento Δm è espressa da $\Delta m \cdot \frac{v^2}{\rho}$; essa poi agendo per un tempo dt sull' elemento stesso produrrebbe una quantità di moto $\Delta m \cdot \frac{v^2}{\rho} \cdot dt$ diretta secondo la normale alla urva descritta dall'elemento dal suo centro di curvatura verso la circonferenza.

In virtù di questa reazione dell'inerzia i varii elementi materiali costituenti il sistema non potendo, pei loro legami, conservare nel tempo dt quelle quantità di moto che avevano alla fine del tempo t soffrono delle variazioni nelle quantità stesse,

quindi nel sistema che serve a rappresentarle, ed è necessario che cerchiamo modo di valutare la loro influenza procacciando di ridurla ad un sistema di forze e di giratori il più semplice possibile; a ciò mira la presente ricerca.

88. Se il corpo si muove unicamente di moto di traslazione allora nel tempo dt ciascun elemento Δm descrivendo curve eguali e parallele, ed essendo eguale per tutti la velocità assoluta, tutti gli sforzi esercitati dai varii elementi del sistema si ridurranno ad uno sforzo unico passante pel baricentro, eguale alla massa del corpo moltiplicata pel quadrato della velocità assoluta del baricentro, che è quella di ciascun elemento, e divisa pel raggio di curvatura della curva descritta dal baricentro, che è eguale e parallela a quella descritta che ciascun elemento. Le cose si passeranno dunque così come se nel baricentro fosse concentrata tutta la massa del corpo e che il baricentro stesso si movesse come effettivamente si muove.

89. Se invece il corpo ruota semplicemente intorno ad un asse dato allora si riferisca il sistema a tre assi ortogonali ponendo l'origine nel baricentro e prendendo l'asse Z parallelo all'asse dato di rotazione; sieno a e b le coordinate del punto in cui l'asse di rotazione incontra il piano XY ed w la velocità angolare alla fine del tempo t. Si consideri l'elemento generico di coordinate x, y, z e sia Δm la sua massa e ρ la sua distanza dell' asse; pel fatto della rotazione nel tempo dt sull'elemento Δm la reazione dell' inerzia sarà perpendicolare all'asse, diretta dall' asse alla circonferenza ed eguale ad $w^2\rho.\Delta m$, ed a questa si potranno sostituire le due $w^2(x-a)\Delta m$ parallela e diretta nello stesso senso di X, ed $w^2(y-b)\Delta m$ parallela e diretta nello stesso senso di Y, le quali produrranno lo stesso effetto del sistema delle due forze predette ma passanti per un punto qualunque di coordinate x_o, y_o, z_o e dei tre giratori motori $w^2(y-b)(z-z_o)\Delta m$ parallelo ed opposto ad X; $w^2(x-a)(z-z_o)\Delta m$ parallelo e dirrtto nello stesso senso di Y; ed $w^2\{(y-b)(x-x_o)-(x-a)(y-y_o)\}\Delta m$ parallelo e diretto nello stesso senso di Z.

Operando una simile riduzione per tutti gli elementi materiali costituenti il sistema, e quindi componendo in uno le forze

ed i giratori la reazione dell'inerzia potrà ridursi sempre al sistema seguente

una forza motrice mw^2a parallela e diretta in senso opposto ad X
» mw^2b parallela è diretta in senso opposto ad Y

passanti ambedue pel punto di coordinate x_0; y_0; z_0 ed

un giratore motore $mw^2\{i\lambda_{yz}+b\,.\,z_0\}$ parallelo e diretto in senso opposto ad X
» $mw^2\{i\lambda_{xz}+a\,.\,z_0\}$ parallelo e diretto nello stesso senso di Y
» $mw^2\{b\,.\,x_0-a\cdot y_0\}$ parallelo e diretto nello stesso senso di Z.

Componendo in uno le forze ed i giratori avremo dunque il sistema di un'unica forza passante pel punto x_0, y_0, z_0 e di un unico giratore e manifestamente la prima resta sempre la stessa qualunque sia il punto pel quale si immagini essa passare, ma il secondo varia al variare del punto medesimo, e potrà sempre ridursi così da soddisfare a quelle condizioni che tornano maggiormente opportune mediante un'opportuna scelta del punto pel quale si fa passare la forza.

89. Qualunque sia il punto pel quale si fa passare la forza essa si ridurrà unicamente alla

$$mF=mw^2\sqrt{a^2+b^2}=mw^2.r \tag{43}$$

e sarà

$$\cos\widehat{FX}=-\frac{a}{r};\quad \cos\widehat{FY}=-\frac{b}{r};\quad \cos\widehat{FZ}=o \tag{44}$$

cioè sarà perpendicolare all'asse, parallela al piano che passa per l'asse e pel baricentro e diretta dall'asse verso il baricentro.

Ogni qualvolta il punto in cui si suppone concentrata la forza giaccia nel piano che passa per l'asse di rotazione e pel baricentro del sistema sarà

$$a\,.\,y_0-b\,.\,x_0=o$$

e quindi il giratore motore sarà perpendicolare all'asse medesimo di rotazione.

Se la forza passa pel baricentro il giratore sarà risultante dei due $mw^2.i\lambda_{yz}$ parallelo e diretto in senso opposto ad X ed $mw^2.i\lambda_{xz}$ parallelo e diretto nello stesso senso di Y e riescirà quindi perpendicolare al componente perpendicolare all'asse del giratore di quantità di moto che anima il sistema.

Se finalmente si farà passare la forza pel centro di rotazione, o pel centro di giratore minimo che torna lo stesso, essendo

$$z_0 = -\frac{a.i\lambda_{xz} + b.i\lambda_{yz}}{r^2}$$

il giratore sarà

$$mw^2\frac{a.i\lambda_{yz} - b.i\lambda_{xz}}{r}$$

sarà minimo e diretto nello stesso senso della forza; esso poi sarà nullo tutte le volte che sia

$$a.i\lambda_{yz} - b.i\lambda_{xz} = o$$

così nello stesso caso in cui è nullo il giratore di quantità di moto i centri di rotazione godono dunque rapporto alle forze centrifughe delle stesse proprietà di cui godono i centri di giratore minimo rapporto alle quantità di moto che animano il sistema.

90. Ripetendo qui quanto ci è detto ai § 69, 70 si scorgerà dunque che

Qualunque sia la direzione dell'asse di rotazione vi ha sempre un piano passante pel baricentro per cui tutti gli assi giacenti nello stesso e paralleli alla direzione data per cui il giratore motore che insieme alla forza motrice rappresenta la reazione dell'inerzia è nullo ogni qual volta la forza motrice si faccia passare pel centro di rotazione corrispondente all'asse che si considera; come pure qualunque sia il piano passante pel baricentro vi ha sempre nel piano stesso una direzione per cui tutti gli assi di rotazione giacenti in quel piano e paralleli alla stessa godono della medesima proprietà.

91. Ora se il sistema si imbatte a ruotare intorno ad un'asse a giratore nullo e venga fermato il suo centro di rotazione, annullandosi in tal caso anche il giratore prodotto dalla reazione dell' inerzia, questa riescirà costantemente estinta per la resistenza del punto e sarà quindi inetta a mutare la quantità di moto preesistente nel sistema medesimo, in virtù della quale (§ 85) esso continuerà a girare intorno a quell'asse, che resterà immobile come se oltre il centro di rotazione venisse fermato in qualche altro de' suoi punti.

Per questa ragione gli assi che godono di questa proprietà diconsi *assi permanenti*, e dicesi *centro di permanenza* quel punto dell'asse che è mestieri di tener fermo perchè l'asse perduri nelle sue condizioni originarie, e che non è altro che il suo centro di rotazione.

92. Se l'asse di rotazione passa pel baricentro allora la forza motrice è nulla e restano soltanto i due giratori motori $mw^2.i\lambda_{yz}$ ed $mw^2.i\lambda_{xz}$ i quali, per essere nulla la forza, non sono suscettibili di alcuna riduzione. Si riproduce qui lo stesso caso rimarcato al § 78 per cui è mestieri di porre un'essenziale differenza fra gli assi di rotazione che passano pel baricentro e tutti gli altri.

Se sia contemporaneamente

$$i\lambda_{xz} = o \qquad i\lambda_{yz} = o$$

allora il giratore dovuto alla reazione dell'inerzia si annulla, ed essendo nulla anche la forza, l' inerzia della materia è inetta sia a spostare sia ad inclinare l'asse il quale rimane per ciò immobile nello spazio senza che siavi bisogno di tener fermo veruno de' suoi punti.

L'asse che gode di tale proprietà dicesi *asse principale* e differisce dall'*asse permanente* in ciò che laddove per questo è mestieri tener fermo il suo centro di permanenza per l'altro non è necessario fissare alcuno de' suoi punti. Come in tal caso l'asse non ha centro di giratore minimo propriamente detto così non ha neppure centro di rotazione, ed è sotto un tal punto di vista soltanto che ha un senso preciso la nota espressione che un asse principale è permanente in ciascuno de' suoi

punti, locchè in fondo torna lo stesso che dire che nessuno dei suoi punti gode di proprietà speciale.

93. Trasportando l'origine delle coordinate nel centro di rotazione, e ritenendo i nuovi assi X'; Y'; Z' paralleli ai precedenti pel § 29 si avrà

$$i\lambda_{x'z'} = i\lambda_{xz} - a\cdot\frac{a.i\lambda_{xz} + b.i\lambda_{zy}}{a^2+b^2} = -b\cdot\frac{a.i\lambda_{yz} - b.i\lambda_{xz}}{r^2}$$

$$i\lambda_{y'z'} = i\lambda_{yz} - b\cdot\frac{a.i\lambda_{xz} + b.i\lambda_{yz}}{a^2+b^2} = a\cdot\frac{a.i\lambda_{yz} - b\ i\lambda_{xz}}{r^2}$$

donde apparisce che quando l'asse sia un'asse a giratore nullo, ossia un asse permanente, prendendo l'origine nel centro di rotazione e l'asse stesso per l'asse della Z dovrà riescire

$$i\lambda_{x'z'} = o\,;\quad i\lambda_{y'z'} = o$$

così a dire, § 47, l'asse di rotazione deve essere uno degli assi dell'elissoide d'inerzia relativa al centro di rotazione dell'asse stesso; siccome poi in ogni elissoide gli assi sono tre, così si scorge che per ciascun punto di un sistema passeranno, tre assi permanenti ortogonali fra loro, e soltanto tre. La stessa considerazione fatta relativamente agli assi principali ci mostra che essi pure sono soltanto tre ed ortogonali fra loro.

Si dice *piano principale* e *piano permanente* il piano che passa per due assi principali, o per due assi permanenti.

Articolo II.

Determinazione degli assi permanenti corrispondenti ad un determinato centro di permanenza, e degli assi principali.

94. Da quanto si è detto nell'articolo precedente risulta che condizione necessaria perchè un sistema di assi giacenti in uno stesso piano passante pel baricentro sia un sistema di assi permanenti è necessario che riferito il sistema a tre assi ortogonali così che l'origine sia nel baricentro e l'asse Z parallelo

alla direzione dei detti assi, ed il piano XZ il piano degli assi a giratore nullo riesca

$$i\lambda_{yz} = o$$

riducendosi a questa la condizione (20) del § 69 se è $b = o$; da cui risulta il seguente

Teorema. Se pel baricentro del sistema si conducano tante rette parallele alla direzione degli assi permanenti corrispondenti ad un sistema di piani intersecantisi tutti secondo una retta passante pel baricentro esse stanno tutte sopra un cono ditomico della quinta specie.

Presa infatti la retta comune intersezione dei detti piani si riferisca il sistema agli stessi assi del § 77, e si prendano le stesse variabili θ e φ del paragrafo stesso, dovendo essere

$$i\lambda_{y'z'} = o$$

sarà

$$\{ i\lambda_{xz} . \text{sen}\,\varphi + i\lambda_{xy} . \cos\varphi \} \cos\theta + \{ i_y^2 - i_z^2 \} \text{sen}\,\varphi . \cos\varphi . \text{sen}\,\theta = o$$

donde

$$(45) \qquad \text{tang} . \theta = \frac{i\lambda_{xz} . \text{sen}\,\varphi + i\lambda_{xy} \cos\varphi}{\{ i_z^2 - i_y^2 \} \text{sen}\,\varphi . \cos\varphi}$$

la quale rappresenta appunto il cono ditomico accennato; esso riesce tagliato da ciascun piano parallelo ai coordinati in un'iperbole equilatera.

95. Sarà ora facile assegnare gli assi permanenti corrispondenti a dato punto di un sistema come pure gli assi principali, ma prima risolverò il seguente problema, la cui soluzione è richiesta per usare delle formole (27) e (45).

Problema. Data una retta passante pel baricentro assegnare il piano in cui tutti gli assi perpendicolari alla retta stessa sono permanenti.

Si prenda la retta data per asse delle X e si coordinino alla stessa comunque gli assi Y e Z: sia φ l'angolo che il piano

cercato fa con XZ contato da Y verso Z, e in questo piano si prenda la Z' perpendicolare ad X, sarà

$$x' = x\,; \quad y' = z\,.\,\mathrm{sen}\,\varphi + y\,.\cos\varphi\,; \quad z' = z\,.\cos\varphi - y\,.\,\mathrm{sen}\,\varphi$$

ora dovendo essere

$$i\lambda_{y'z'} = o$$

sarà

$$(46) \qquad \mathrm{tang}\,.\,2\,\varphi = \frac{2\,i\lambda_{yz}}{i_z^2 - i_y^2}$$

i piani cercati sono dunque due rispettivamente perpendicolari fra loro; di questi prenderemo quello che fa con XZ un angolo acuto.

96. Ecco ora come si determineranno in ogni caso e gli assi permanenti e gli assi principali.

Essendo dato il punto centro di permanenza si condurrà pel punto stesso una retta e l'asse cercato dovrà manifestamente essere uno degli assi permanenti corrispondenti ad un fascio di piani intersecantisi lungo la detta retta, e quindi parallelo ad una delle generatrici della superficie conica rappresentata dalla (45), cioè dovrà trovarsi sulla superficie conica predetta supposto che questa si trasporti parallelamente a sè stessa così che il suo vertice coincida col punto dato. Di più dovendo il suo centro di rotazione trovarsi nel punto dato dovrà essere uno degli assi appartenenti alla superficie conica del terzo ordine rappresentata dalla (27), esso dunque sarà l'intersezione delle due superficie coniche (45) e (27) supposto che la (45) siasi trasportata parallelamente fino a porre il suo vertice nel punto dato. Per maggiore uniformità conserveremo la (45) col vertice nel baricentro, e supporremo trasportata la (27) parallelamente a sè stessa fino a porre il vertice nel baricentro, e allora l'asse cercato sarà l'asse che passa pel punto dato ed è parallelo alla comune intersezione delle due superficie predette.

Se l'asse passa pel baricentro e debba essere asse a giratore nullo allora dovendo essere § 92 tanto $i\lambda_{yz} = o$ quanto $i\lambda_{xz} = o$ perchè riesca soddisfatta la prima basterà che si soddisfi alla (45) e per la seconda basterà porre $a = o$ nella (27), e l'asse

principale sarà allora la comune intersezione delle due superficie coniche corrispondenti.

97. Dato dunque il punto centro di permanenza si prenderà per l'asse X la retta che passa pel punto dato e pel baricentro se si tratta d'asse permanente, od una retta qualunque passante pel baricentro se si cerca l'asse principale, e assegnato il piano i cui assi permanenti sono perpendicolari a questa retta, si prenderà in questo piano l'asse Z e fissata l'origine nel baricentro si calcolerà il valore dei soliti sei integrali; posto poi per brevità

$$(47)\quad \frac{i\lambda_{xz}}{i_z^2 - i_y^2} = b\,; \quad \frac{i\lambda_{xy}}{i\lambda_{xz}} = m\,; \quad \frac{a^2 + i_z^2 - i_x^2}{i_z^2 - i_y^2} = n\,; \quad \text{tang.}\varphi = x$$

i cercati valori si avranno dai valori di X che rendono eguali i valori di θ delle equazioni

$$(48)\quad \text{tang}\,\theta = b\frac{(x+m)\sqrt{1+x^2}}{x}\,; \quad \text{tang.}\,2\theta = 2b\frac{(1-mx)\sqrt{1+x^2}}{n+(n-1)x}.$$

Ora è

$$\text{tang}\,.\,2\theta\,.\,\text{tang}^2.\,\theta + 2\,\text{tang}.\,\theta - \text{tang}.\,2\theta = o$$

e sostituendo in questa i valori precedenti, riducendo e togliendo il fattore comune $(1+x^2)$, che dà due intersezioni immaginarie, si avrà l'equazione del terzo grado

$$(49)\quad x^3 + \left\{\frac{2m^2-1}{m} - \frac{n-1}{b^2 m}\right\}x^2 + \left\{m^2 - 2 - \frac{n}{b^2}\right\}x - m = o$$

dalla cui risoluzione si avranno i cercati valori di x, e quindi i valori di φ e θ corrispondenti agli assi cercati.

98. Egli è facile il dimostrare che la precedente equazione ha tutte e tre le sue radici reali, ed assegnare eziandio i limiti fra i quali esse sono comprese. Infatti posta sotto l'aspetto

$$\{x+m\}\left\{x^2 + \frac{b^2(m^2-1)-n}{b^2 m}\cdot x - 1\right\} + \frac{x^2}{b^2 m} = o$$

se diciamo x_1 ed x_2 le due radici dell'equazione

$$(50) \qquad x^2 + \frac{b^2 (m^2 - 1) - n}{b^2 m} . x - 1 = o$$

le quali sono essenzialmente reali e di segno opposto, e supponiamo essere x_1 la radice positiva, per $x = + \infty$ si avrà un risultamento positivo, per $x = x_1$ un risultamento dello stesso segno di m; per $x = o$ un risultamento di segno opposto ad m; per $x = x_2$ un risultamento dello stesso segno di m; e finalmente per $x = - \infty$ un risultamento negativo, donde apparisce che la proposta avrà una radice positiva e due negative per m positivo, ed all'opposto due radici positive ed una negativa per m negativo.

Gli assi permanenti corrispondenti ad ogni punto del sistema sono dunque *tre* e soltanto *tre*, e così pure soltanto tre sono i suoi assi principali.

99. I tre assi permanenti che hanno il loro centro di permanenza in uno stesso punto di un dato sistema sono ortogonali fra loro.

Diffatti detto O l' angolo formato da due dei medesimi, e dette x_1 ed x_2 le radici della (49) se corrispondono agli assi stessi sarà

$$\cos O = \cos \theta_1 . \cos \theta_2 + \operatorname{sen} \theta_1 . \operatorname{sen} \theta_2 . \cos (\varphi_2 - \varphi_1)$$

ossia

$$\cos O = \cos \theta_1 . \cos \theta_2 \left\{ 1 + b^2 \frac{(m + x_1)(m + x_2)(1 + x_1 x_2}{x_1 x_2} \right\}$$

ed indicando con x_3 la terza radice, sviluppando ed osservando essere

$$(51) \quad x_1 + x_2 + x_3 = - \left\{ \frac{2m^2 - 1}{m} - \frac{n - 1}{b^2 m} \right\} ;$$

$$x_1 x_2 + x_1 x_3 + x_2 x_3 = m^2 - 2 - \frac{n}{b^2} ; \qquad x_1 x_2 x_3 = m$$

$$\cos O = - \frac{b^2}{x_3^3} . \cos \theta_1 . \cos \theta_2 \left\{ x_3^3 + \left\{ \frac{2m^2 - 1}{m} - \frac{n - 1}{b^2 m} \right\} x_3^2 + \left\{ m^2 - 2 - \frac{n}{b^2} \right\} x_3 - m \right\}$$

il cui secondo membro è zero per essere x_3 radice della (49) quindi

$$\cos O = o\,; \qquad O = 90°.$$

Articolo III.

Distribuzione degli assi permanenti in un sistema dato.

100. Se si suppongono collocati i vertici delle due superficie coniche, le cui intersezioni danno gli assi permanenti corrispondenti al punto che si considera, in questo punto e si tagliano con un piano perpendicolare alla retta che congiunge il detto punto col baricentro, verranno tagliate in un'iperbola equilatera ed in una curva del terzo ordine inversa di sè stessa ed avente il centro d'inversione nel punto g ove si progetta sul piano il baricentro del sistema, e i punti comuni intersezioni delle dette curve rappresenteranno i punti in cui i tre assi permanenti corrispondenti al punto dato attraversano il piano secante.

Riferendo l'intersezione dei due coni ai due assi presi secondo le intersezioni del piano secante coi piani XZ ed XY, e quindi trasportando l'origine nel punto di coordinate $-bm$ e b, ed osservando essere allora

$$y - b\,m = - \operatorname{tang}\theta \,.\, \operatorname{sen}\varphi = - b\,(x + m)$$

$$b - z = \operatorname{tang}\theta \,.\, \cos\varphi = b \,.\, \frac{x + m}{m}$$

ossia

$$y = - b\,.\,x\,; \qquad z = - \frac{bm}{x} \tag{52}$$

mediante i valori (51) si formerà facilmente l'equazione

$$y^3 - b\left\{2m - \frac{b^2 + n - 1}{b^2\,m}\right\} y^2 + b^2\left\{m^2 - 2 - \frac{n}{b^2}\right\} y + b^3 m = o \tag{53}$$

che insieme all' equazione dell' iperbole equilatera

(54) $$y \cdot z = b^2 m$$

somministra le coordinate dei tre punti predetti.

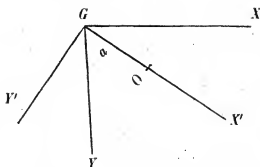
101. Posto

$$y_1 = \sqrt{\left\{1 + \left\{\frac{n-1}{2\,b\,m}\right\}^2\right\}} - \frac{(n-1) - 2\,b^2 m^2}{2\,b\,m}$$

$$y_2 = -\sqrt{\left\{1 + \left\{\frac{n-1}{2\,b\,m}\right\}^2\right\}} - \frac{(n-1) + 2\,b^2 m^2}{2\,b\,m}$$

l' equazione (53) ha una radice compresa fra bm ed y_1, una fra bm ed y_2 ed una numericamente sempre maggiore di y_2; ne discende che al crescere di n, ossia al crescere della distanza del punto di permanenza dal baricentro, per $n-1$ positivo y_1 si avvicina allo zero ed y_2 all'infinito, e quindi un punto si accosta costantemente al punto g e gli altri due si discostano all'infinito, e per $n-1$ negativo succede lo stesso, ma il punto che si accosta g è invece quello cui corrisponde la radice compresa fra bm ed y_2. Da ciò ricaviamo un facile mezzo per formarci un'idea dell'andamento degli assi permanenti rapporto ai punti di una medesima retta passante pel baricentro.

Si immagini il cono ditomico degli assi permanenti corrispondente alla direzione della retta data e l' iperbole equilatera che è intersezione del detto cono col piano perpendicolare alla retta e discosto uno dal suo vertice, e posto il vertice nel baricentro si figuri il triedro trirettangolo degli assi principali, che riescirà inscritto nel detto cono, i cui spigoli attraverseranno l' iperbola in tre punti, che diremo m_o, n_o, p_o, e sia m_o quello dei detti punti che si va continuamente accostando a g, proiezione del baricentro sul piano secante. Per avere gli assi permanenti rapporto ai varii punti della retta di più in più discosti dal baricentro basterà far scorrere il cono lungo la retta, tenendolo costantemente parallelo a sè stesso e contemporaneamente far scorrere il triedro trirettangolo così da appoggiarsi costantemente all' iperbola, e che il suo spigolo che passava originariamente per m_o si vada continuamente acco-

stando alla retta data fino a confondersi colla stessa per punto situato a distanza infinita.

102. Consideriamo il caso speciale in cui il punto dato sia nel piano di due degli assi principali, per esempio, nel piano degli assi X ed Y. Sia O questo punto e siéno x_o, y_o i coseni degli angoli che la retta GO forma rispettivamente cogli assi X ed Y. Riferendo il sistema agli assi GO, quale asse delle X', all' asse Y' nel piano XY ed all' asse Z normale a GX', e quindi al piano $X'GZ$ degli assi permanenti normali GO, dalle formole del Cap. II. Art. 1° si avrà

$$i_{x'}^2 = x_0^2 \cdot i_x^2 + y_0^2 \cdot i_y^2 \; ; \quad i_{y'}^2 = y_0^2 \cdot i_x^2 + x_0^2 \cdot i_y^2 \; ; \quad i_{z'}^2 = i_z^2$$

$$i\lambda_{x'y'} = x_0 y_0 \left(i_x^2 - i_y^2 \right); \quad i\lambda_{x'z'} = 0 \; ; \quad i\lambda_{y'z'} = 0$$

con che le equazioni (45) e (27) diventano rispettivamente

$$(55) \quad \text{tang.}\,\theta = \frac{x_o\, y_o \left(i_x^2 - i_y^2 \right) \cos\varphi}{\left(i_z^2 - x_0^2 \cdot i_y^2 - y_0^2 \cdot i_x^2 \right) \text{sen}\,\varphi \,.\, \cos\varphi}$$

$$(56) \quad \text{tang.}\,2\theta = -\frac{2 x_o\, y_o \left(i_x^2 - i_y^2 \right) \text{sen}\,\varphi}{\left(a^2 + i_z^2 - x_0^2 . i_x^2 - y_0^2 . i_y^2 \right) \cos^2\varphi + \left\{ a^2 - (x_0^2 - y_0^2)(i_x^2 - i_y^2) \right\} \text{sen}^2\varphi}$$

la prima delle predette equazioni si scompone nelle due

$$(57) \qquad \cos\varphi = o$$

$$(58) \qquad \operatorname{tang}\theta = \frac{x_o y_o (i_x^2 - i_y^2)}{(i_z^2 - x_o^2 \cdot i_y^2 - y_o^2 \cdot i_x^2)\operatorname{sen}\varphi}$$

delle quali la prima rappresenta il piano XY e la seconda il piano passante per Z che taglia il piano XY lungo una retta rappresentata dall'equazione

$$(59) \qquad \operatorname{tang}.\theta_1 = \frac{x_o y_o (i_x^2 - i_y^2)}{i_z^2 - x_o^2 \cdot i_y^2 - y_o^2 \cdot i_x^2}$$

rappresentando con θ_1 l'angolo che forma colla GO.

103. Combinando la (57) colla (56) quest'ultima diventa

$$(60) \qquad \operatorname{tang}.2\theta = -\frac{2x_o y_o (i_x^2 - i_y^2)}{a^2 + (y_o^2 - x_o^2)(i_x^2 - i_y^2)}$$

e si scompone nel sistema delle due rette

$$(61) \qquad \operatorname{tang}.\theta = m + \sqrt{1 + m^2}; \quad \operatorname{tang}\theta = m - \sqrt{1 + m^2}$$

dove per semplicità si è posto

$$m = \frac{a^2 + (y_o^2 - x_o^2)(i_x^2 - i_y^2)}{2x_o y_o (i_x^2 - i_y^2)}$$

e queste rappresentano le direzioni di due degli assi permanenti relativamente ad O situati nel piano XY.

Al crescere di a è facile lo scorgere che una di queste rette si va successivamente avvicinando alla GO, l'altra alla sua perpendicolare.

Combinando la (56) colla (58) si avrà facilmente l'eqnazione

$$\frac{\left\{i_z^2 - x_o^2 \cdot i_y^2 - y_o^2 \cdot i_x^2\right\} \operatorname{sen} \varphi}{\left\{i_z^2 - x_o^2 \cdot i_y^2 - y_o^2 \cdot i_x^2\right\}^2 \operatorname{sen}^2 \varphi - x_o^2 \cdot y_o^2 \left\{i_x^2 - i_y^2\right\}^2}$$

$$+ \frac{\operatorname{sen} \varphi}{\left\{a^2 + i_z^2 - x_o^2 \cdot i_x^2 - y_o^2 \cdot i_y^2\right\} - \left\{i_z^2 - x_o^2 \cdot i_y^2 - y_o^2 \cdot i_x^2\right\} \operatorname{sen}^2 \varphi} = o$$

la quale per a qualunque non è soddisfatta che dal solo valore di

$$\operatorname{sen} \varphi = o;$$

questo ci dice che il terzo asse è perpendicolare al piano XY, come era d'altra parte noto.

104. Se però sia

$$(62) \qquad a^2 = \frac{\left\{i_y^2 - i_z^2\right\}\left\{i_z^2 - i_x^2\right\}}{i_z^2 - x_o^2 \cdot i_y^2 - y_o^2 \cdot i_x^2}$$

allora la superiore sussiste qualunque sia il valore di φ, e quindi in tal caso tutte le rette passanti per quel punto e giacenti in un piano perpendicolare al piano principale XY, la cui traccia sul piano stesso è parallela alla (59), sono tutte assi permanenti; allora un asse è perpendicolare al piano precedente, e tutti gli altri, in numero infinito, giacciono nel piano predetto.

105. I punti del piano XY che godono di una tale proprietà stanno sopra la conica

$$(63) \qquad \frac{x^2}{i_x^2 - i_z^2} + \frac{y^2}{i_y^2 - i_z^2} = 1$$

la quale sarà un'elisse se i_z^2 è il più piccolo dei tre; un'iperbole se il medio, ed immaginaria se il minimo.

Nel piano dunque dei due assi del massimo e del medio momento d'inerzia, e nel piano del massimo e del minimo esiste una serie di punti, giacenti i primi in un elisse i secondi in un iperbole aventi il centro nel baricentro e gli assi coincidenti coi relativi assi principali, i quali godono della proprietà che tutti

gli assi passanti per quei punti e giacenti in un piano normale al relativo piano principale e parallelo al piano assegnato dalla (59) sono tutti assi permanenti rapporto ai punti medesimi.

106. Se il punto O casca sopra uno degli assi principali, per esempio, sull'asse X allora è $x_o = 1$; $y_o = 1$ e la (60) dà

$$\tang . 2\,\theta = o$$

cioè, un'asse è lo stesso asse X, gli altri sono perpendicolari allo stesso nel piano degli altri due assi principali.

Se però sia

$$(64) \qquad a^2 = i_x^2 - i_y^2$$

allora tang $2\,\theta$ riesce indeterminato e tutti gli assi passanti per quel punto sono tutti assi permanenti.

Perchè a sia reale è mestieri che sia $i_x^2 > i_y^2$ e allora avremo due punti

$$a = \pm \sqrt{i_x^2 - i_y^2}$$

che godono della proprietà che tutti gli assi passanti pei punti medesimi sono assi permanenti; essi giacciono sull'asse del massimo momento e ad eguale distanza dall' una e dall' altra parte del baricentro.

CAPO V.

Moto di rotazione intorno ad un asse.

Articolo I.

Nozioni.

107. Abbiasi un sistema rigido fisso a due perni così che non gli sia concesso altro movimento se non quel solo di ruotare intorno alla retta che passa pei due perni suddetti, la qual retta costituirà quindi il costante asse di rotazione del sistema stesso.

Sopra questo sistema operino delle forze esterne al sistema, date in grandezza e direzione ad ogni istante, siccome il moto che esse produrrebbero, se il sistema fosse libero, sarebbe una traslazione ed una rotazione intorno ad asse generalmente differente da quello intorno al quale effettivamente ruota, così esso, oltre ruotare, determinerà una pressione sopra ciascuno dei perni dipendente dall'azione di quella parte delle forze operanti che viene distrutta dalla reazione dei perni, nonchè dall' azione dell'inerzia, dovuta alla particolare distribuzione della massa del sistema. Egli è evidente che siccome i perni, o i punti fissi, non fanno altro che distruggere ad ogni istante l' azione di queste cause così potremo supporre rimossi i perni stessi e sostituite in loro luogo due forze eguali e contrarie a quelle che sono capaci di produrre la pressione che essi sopportano ad ogni singolo istante; allora il sistema si dovrà considerare come interamente libero, e sottoposto all'azione delle forze esterne operanti ed alle reazioni dei perni e dell' inerzia; in virtù di queste cause esso ruota intorno all'asse dato e quindi le forze stesse dovranno ridursi a quelle che producono la rotazione effettiva che ha il sistema proposto.

108. La velocità angolare del sistema e le pressioni sui perni varieranno col tempo, e se a un dato istante cessa l'azione delle forze esterne la velocità angolare che avrà acquistato il sistema fino a quell'istante si manterrà inalterata per tutto il tempo successivo, riducendosi il suo moto ad un moto di rotazione uniforme, e le pressioni sui perni si ridurranno unicamente a quelle dovute alla reazione dell' inerzia. Infatti cessando l' azione delle forze esterne e la reazione dell'inerzia essendo distrutta dai punti fissi, nessuna causa interviene a far mutare la quantità di moto e il giratore di quantità di moto che animano il sistema all' istante in cui cessa l'azione delle forze, e la reazione dell'inerzia va ad equilibrarsi sui perni.

In questo caso, relativamente alle pressioni sopportate dai perni, è necessario considerare a parte quelle che essi soffrono all'istante in cui le forze esterne cessano di agire, e quelle che sopportano poi durante il successivo movimento. Se la forza operante agisce sul sistema per un tempo brevissimo e tale che durante il medesimo non muti sensibilmente la posizione del corpo,

nel qual caso si dice che il moto è comunicato al corpo da un urto, allora le pressioni sui perni durante quel brevissimo istante si valutano come se tutta la quantità di moto trasmessa al corpo dalla forza operante vi venga trasmessa in un solo istante e che il corpo rimanga immobile durante l'azione della forza stessa; le pressioni sui perni allora sono vere percosse le quali cessano al cessare dell'azione della forza, e quindi al principiare del moto; la velocità angolare poi del corpo sarà conseguenza dell'azione della forza e delle reazioni dei perni soltanto, giacchè allora, non avvenendo rotazione, è nulla la reazione dell'inerzia.

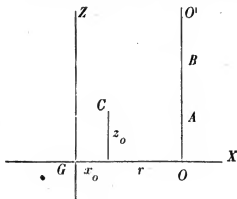
109. I problemi relativi al moto di rotazione di un sistema rigido intorno ad un asse si spartiscono in due; cioè nei problemi relativi al *moto uniforme*, che si suppone prodotto nel modo detto precedentemente; e nei problemi relativi al *moto vario* di rotazione intorno all'asse dato, i quali si presentano allora che una forza esterna continua opera sopra il sistema.

Nei primi le ricerche da imprendersi sono (*a*) determinare la velocità angolare che concepirà il sistema; (*b*) determinare le quantità di moto che vanno ad estinguersi sui perni, e che producono una vera percossa sui medesimi durante il brevissimo tempo in cui opera la forza; (*c*) assegnare le pressioni costanti che sopportano i perni durante il movimento, e che sono dovute alla reazione dell'inerzia.

Nei secondi si deve assegnare (*a*) la velocità angolare del sistema ad ogni singolo istante; (*b*) le pressioni che sopportano i perni pure ad ogni istante determinato.

110. Se il corpo è stato messo in movimento in principio da una forza operante la quale non agi sul medesimo che per un brevissimo istante, allora le condizioni iniziali saranno quelle dovute all'azione della forza medesima, e il moto successivo sarà risultante del moto impresso e di quello generato dalla forza continua.

Articolo II.

Moto uniforme di rotazione intorno ad un asse.

111. Sieno A e B i due perni, e quindi $OABO'$ l'asse di rotazione: si riferisca il sistema a tre assi rettangolari ponendo l'origine nel baricentro, conducendo l'asse Z parallelo all'asse di rotazione, prendendo per piano XZ il piano che passa per l'asse stesso e pel baricentro, e conducendo l'asse Y così che la rotazione avvenga da X verso Y.

Supponiamo che la forza operante incontri il piano XY nel punto C di coordinate x_o, y_o, e supponiamo che decomposta essa in tre parallelamente ai tre assi le tre componenti sieno tali da trasmettere nel corpo, durante l'azione della forza, le tre quantità di moto mu_x, mu_y, mu_z, rispettivamente parallele ai tre assi medesimi. Diciamo mp_x; mp_y; mp_z; mp'_x; mp'_y; mp'_z le componenti, secondo i tre assi, delle quantità di moto eguali e direttamente contrarie a quelle che vanno ad estinguersi sui due cardini A e B; sia w la velocità angolare che concepirà il sistema, a e b le distanze dei primi dall'asse X, ed r la distanza dell' asse dal baricentro.

Supposto il sistema interamente libero e sollecitato dalle forze capaci di imprimere le quantità di moto predette applicate rispettivamente ai punti C, A e B, esso concepirà una rotazione w

intorno all'asse O, e quindi le quantità di moto comunicate dalle dette forze dovranno ridursi al sistema di quantità di moto e di giratore di quantità di moto che rappresentano la rotazione medesima. Se quindi riduciamo tutte le predette quantità di moto al baricentro esse dovranno ridursi (Capo III. Art. 3.) ad una quantità di moto mwr parallela ed opposta ad Y, ad un giratore $mw.i\lambda_{xz}$ parallelo ed opposto ad X; ad un giratore $mw.i\lambda_{yz}$ parallelo ed opposto ad Y, e finalmente ad un giratore $mw.i_z^2$ parallelo e diretto nello stesso senso di Z; trasportando quindi le predette quantità di moto in G, per quello che ora si è detto, avremo il sistema delle seguenti equazioni

$$u_x+p_x+p'_x=o;\quad u_y+p_y+p'_y=-wr;\quad u_z+p_z+p'_z=o$$

$$u_z z_o+p_y a+p'_y b=w.i\lambda_{xz};$$

$$u_x z_o+p_x a+p'_x b-u_z x_o-(p_z+p'_z)r=-w\,i\lambda_{yz}$$

$$u_y x_o+(p_y+p'_y)r=w.i_z^2$$

donde tosto

$$w=-\frac{(r-x_o)u_y}{i_o^2} \tag{65}$$

$$\left\{\begin{aligned}
p_x&=-\frac{b-z_o}{b-a}u_x-\frac{r-x_o}{b-a}\frac{i\lambda_{yz}}{i_o^2}\cdot u_y+\frac{r-x_o}{b-a}u_z\\
p'_x&=\frac{a-z_o}{b-a}\cdot u_y+\frac{r-x_o}{b-a}\cdot\frac{i\lambda_{yz}}{i_o^2}u_y-\frac{r-xo}{b-a}u_z\\
p_y&=-\frac{(b-z_o)i_z^2-r(rz_o-bx_o)-(r-x_o)i\lambda_{xz}}{i_o^2(b-a)}\cdot u_y\\
p'_y&=\frac{(a-z_o)i_z^2-r(rz_o-ax_o)-(r-x_o)i\lambda_{xz}}{i_o^2(b-a)}\cdot u_y\\
p_z&+p'_z=-u_z
\end{aligned}\right. \tag{66}$$

le quali risolvono completamente il problema proposto.

112. Se l'urto avviene nel centro di giratore minimo sarà

$$x_o = -\frac{i_z^2}{r}\,; \quad z_o = -\frac{i\lambda_{xz}}{r}$$

quindi

$$(67)\quad \begin{cases} p_x = -\dfrac{br + i\lambda_{xz}}{r(b-a)} u_x - \dfrac{i\lambda_{yz}}{r(b-a)} u_y + \dfrac{i_o^2}{r(b-a)} u_z \\ p'_x = \dfrac{ar + i\lambda_{xz}}{r(b-a)} u_x + \dfrac{i\lambda_{yz}}{r(b-a)} u_y - \dfrac{i_o^2}{r(b-a)} u_z \\ p_y = p'_y = o\,; \quad p_z + p'_z = -u_z \end{cases}$$

cioè in tal caso l'asse non soffre alcuna percossa perpendicolarmente al piano che passa per l'asse e pel baricentro.

Se di più è $u_x = o$, cioè se la forza impressa stà in un piano parallelo all'asse dei cardini e perpendicolare al piano che passa per l'asse stesso e pel baricentro, sarà

$$(68)\qquad p_x = -p'_x = -\frac{i\lambda_{yz}}{r(b-a)} u_y + \frac{i_o^2}{r(b-a)} u_z$$

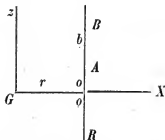
cioè perpendicolarmente all'asse nel piano suddetto le due pressioni sono eguali e di segno opposto, il cardine superiore riescendo tratto all'infuori e l'inferiore spinto in dentro.

Se finalmente sia

$$(69)\qquad i\lambda_{yz} \,.\, u_y = i_o^2 \,.\, u_z$$

i cardini non soffrono alcuna pressione perpendicolarmente all'asse, però parallelamente allo stesso riescono spinti da uno sforzo complessivo rappresentato da una quantità di moto mu_z la quale va ad estinguersi sopra i cardini stessi.

Che se l'asse fosse un asse permanente e fosse di più $u_z = o$, allora, essendo $i\lambda_{yz} = o$, l'asse non soffre alcuna pressione, conformemente a quanto si è veduto nel capo precedente.

113. Le prrssioni suddette non sussistono che pel brevissimo tempo in cui dura l' azione della forza e cessano al cessare della stessa, in seguito subentra l'azione delle forze centrifughe, dovute alla reazione dell'inerzia, le quali si fanno equilibrio sui due perni e rappresentano le pressioni sopportate dai medesimi.

Nel capo precedente abbiamo veduto che, detto R il centro di rotazione dell' asse, le forze centrifughe possono ridursi ad una forza motrice mw^2r perpendicolare all'asse, passante per R e diretta della parte del baricentro nel piano che passa per l'asse e pel baricentro stesso, e ad un giratore di forza motrice $mw^2.i\lambda_{yz}$ parallelo alla forza e diretto esso pure dalla parte del baricentro. Ciò premesso se trasportiamo la predetta forza a passare pel cardine A avremo in A una forza mw^2r parallela ed in senso opposto ad X e due giratori, l'uno $mw^2.i\lambda_{yz}$ parallelo ed opposto ad X, ed uno $mw^2(ar+i\lambda_{xz})$ parallelo ad Y e diretto nel suo stesso senso; sostituendo ai detti giratori due forze l'una applicata in A e l'altra in B avremo tosto le pressioni seguenti

$$(70)\left\{\begin{array}{ll} p_x = -mw^2 \dfrac{br+i\lambda_{xz}}{b-a}; & p'_x = mw^2 \dfrac{ar+i\lambda_{xz}}{b-a} \\ p_y = -mw^2 \dfrac{i\lambda_{yz}}{b-a}; & p'_y = mw^2 \dfrac{i\lambda_{yz}}{b-a} \\ p_z = o; & p'_z = o \end{array}\right.$$

Se è $i\lambda_{yz} = o$, cioè se l'asse è permanente, sarà anche

$$p_y = o; \quad p'_y = o$$

Se finalmente il cardine A coincide con R sarà

$$a = -\frac{i\lambda_{xz}}{r} \text{ quindi; } p_x = -m\,w^2 r; p'_x = o$$

e sarà inversamente

$$p_x = o \quad \text{e} \quad p'_x = -m w^2 r$$

se coincide con R il cardine B.

Articolo III.

Moto vario di rotazione intorno ad un asse.

114. Allorchè ad un corpo sollecitato da forze continue non è dato se non se di muoversi ruotando intorno ad un asse fisso, allora la sua velocità angolare e le pressioni che esso esercita sui due primi varieranno ad ogni singolo istante, ed a far variare tanto l'una quanto le altre concorre l'azione delle forze acceleratrici sollecitanti i suoi elementi materiali e la reazione dell'inerzia, ed è evidente che se noi supponiamo rimossi i cardini e sostituite in loro luogo delle forze continue eguali e direttamente contrarie alle pressioni sopportate dai medesimi ad ogni singolo istante, potremo considerare il sistema interamente libero, ed allora l' azione di tutte queste cause operanti deve ridursi a quella che è necessaria perchè la velocità angolare w intorno all'asse dato varii della quantità dw nel tempo dt.

Ora, prendendo lo stesso sistema di assi del caso precedente, per generare nella velocità angolare un aumento dw nel tempo dt occorre l'azione di una forza capace di ingenerare nel tempo dt una quantità di moto $mr.dw$ parallela e diretta in senso opposto ad Y, e, se questa si suppone passare pel baricentro, il sistema di giratori di quantità di moto $m\,i\lambda_{xz} \cdot dw$ parallelo ed opposto ad X, $m\,i\lambda_{yz} \cdot dw$ parallelo ed opposto ad Y, ed $m\,i_z^2 \cdot dw$ parallelo e diretto nello stesso senso di Z; se quindi conduciamo tutte le cause operanti a passare pel baricentro esse dovranno

ridursi a quelle che sono necessarie per comunicare al sistema le quantità di moto rappresentate dal sistema predetto.

115. Sieno quindi X, Y, Z le componenti della forza acceleratrice che sollecita alla fine del tempo t l'elemento generico Δm di coordinate x, y, z; p_x; p_y; p_z; p'_x; p'_y; p'_z le componenti delle pressioni sopportate dai cardini A e B pure alla fine del tempo t, valutate in forza acceleratrice e prese in senso contrario; siccome la reazione dell' inerzia, riportata al baricentro, si riduce ad una forza acceleratrice $w^2 r$ parallela e diretta in senso opposto ad X, e ai due giratori acceleratori $w^2. i\lambda_{yz}$ parallelo e diretto in senso opposto ad X, ed $w^2. i\lambda_{xz}$ parallelo e diretto nello stesso senso di Y, così si ricaverà facilmente il sistema seguente di equazioni

$$(71)\left\{\begin{aligned}
&p_x + p'_x - w^2 r + \frac{1}{m}\Sigma\ X.\Delta m = o\\
&p_x + p'_y + \frac{1}{m}\Sigma\ Y.\Delta m = -r.\frac{dw}{dt}\\
&p_z + p'_z + \frac{1}{m}\Sigma\ Z.\Delta m = o\\
&ap_y + b\,p'_y + w^2.i\lambda_{yz} - \frac{1}{m}\Sigma(Zy - Yz)\Delta m = i\lambda_{xz}\frac{dw}{dt}\\
&ap_x + bp'_x - (p_z + p'_z)r + w^2 i\lambda_{xz}\\
&\qquad + \frac{1}{m}\Sigma(Xz - Zx)\,\Delta m = -i\lambda_{yz}\frac{dw}{dt}\\
&(p_y + p'_y)\,r + \frac{1}{m}\Sigma(Yx - Xy)\Delta m = i_z^2.\frac{dw}{dt}
\end{aligned}\right.$$

dalle quali si ricava tosto

$$(72)\qquad \frac{dw}{dt} = \frac{\Sigma\{Y.(x-r) - Xy\}\,\Delta m}{m\,i_o^2}$$

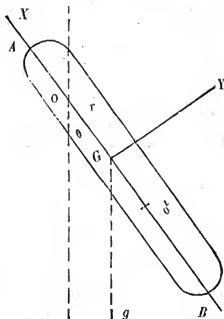
e quindi

$$
(73)\quad\left\{
\begin{aligned}
p_x &= \frac{br + i\lambda_{xz}}{b-a}\,w^2 + \frac{i\lambda_{yz}}{b-a}\cdot\frac{dw}{dt} \\
&\qquad \frac{+\,\Sigma\{X(z-b)-Z(x-r)\}\,\Delta m}{m\,(b-a)} \\
p'_x &= -\frac{ar + i\lambda_{xz}}{b-a}\,w^2 - \frac{i\lambda_{yz}}{b-a}\cdot\frac{dw}{dt} \\
&\qquad \frac{-\,\Sigma\{X(z-a)-Z(x-r)\}\,\Delta m}{m\,(b-a)} \\
p_y &= \frac{i\lambda_{yz}}{b-a}\,w^2 - \frac{br + i\lambda_{xz}}{b-a}\cdot\frac{dw}{dt} - \frac{\Sigma\{Zy - Y(z-b)\}\,\Delta m}{m(b-a)} \\
p'_y &= -\frac{i\lambda_{yz}}{b-a}\cdot w^2 + \frac{ar + i\lambda_{xz}}{b-a}\cdot\frac{dw}{dt} + \frac{\Sigma\{Zy - Y(z-a)\}\,\Delta m}{m(b-a)} \\
p_z + p'_z &= -\frac{1}{m}\,\Sigma\,Z.\Delta m
\end{aligned}
\right.
$$

116. Dalle equazioni precedenti risulta che le pressioni che sopportano i due cardini quando il corpo ruota sono assai differenti da quelle che essi sopportano essendo il corpo in quiete, alle quali non si riducono che nel solo caso in cui l'asse che passa pei cardini sia uno dei tre assi principali del sistema, essendo allora

$$r=o;\qquad i\lambda_{xz}=o;\qquad i\lambda_{yz}=o$$

Articolo IV.

Moto di rotazione di un corpo pesante intorno al asse orizzontale. Pendolo composto.

117. Il sistema proposto sia un corpo pesante AB sospeso ad asse orizzontale, ed il piano della figura rappresenti il piano condotto pel baricentro G perpendicolarmente all' asse O; in conformità delle assunte convenzioni il sistema degli assi di riferimento sarà il sistema di assi rettangolari che ha l'origine in G, in cui l'asse Z è parallelo all'asse dato di sospensione e gli assi X ed Y hanno le direzioni segnate nella figura. Condotto per l'asse di sospensione un piano verticale sia θ l'angolo che con questo piano forma il piano che passa per l'asse stesso e pel baricentro alla fine del tempo t, e supponendo tutte le forze di gravità che sollecitano i varii elementi scomposte secondo gli assi suddetti sarà evidentemente

$$X = -g.\cos\theta; \quad Y = -g.\text{sen}\,\theta; \quad Z = o$$

e quindi, essendo

$$w = -\frac{d\theta}{dt},$$

la (72) diventa

$$(74) \qquad \frac{d^2\theta}{dt^2} = -\frac{gr}{i_o^2}\,\text{sen}\,\theta$$

la quale moltiplicata per $2d\theta$ ed integrata dà

$$\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 = \frac{2gr}{i_o^2}\cos\theta + \text{Costante}$$

118. Suppongasi ora che all'origine del tempo il piano che passa per l'asse e pel baricentro formi un angolo θ_o col piano verticale, e che siasi impressa al corpo una velocità angolare Ω, dovrà essere per $t = o$

$$\theta = \theta_o\,; \qquad \left(\frac{d\theta}{dt}\right) = -\Omega$$

e quindi sarà

$$(75) \qquad \left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 = \Omega^2 + \frac{2gr}{i_o^2}\left\{\cos\theta - \cos\theta_o\right\}$$

e se sia $\Omega = o$, osservando che θ diminuisce al crescere di t, sarà

$$(76) \qquad dt = -\sqrt{\frac{i_o^2}{2gr}} \cdot \frac{d\theta}{\sqrt{(\cos\theta - \cos\theta_o)}}$$

la quale, ponendo

$$(77) \qquad \cos\theta = \cos\theta_o + 2\,\text{sen}^2\frac{1}{2}\theta_o \cdot \cos^2\varphi$$

si trasforma tosto nella

$$(78) \qquad dt = -\sqrt{\frac{i_o^2}{gr}} \cdot \frac{d\varphi}{\sqrt{(1 - \text{sen}^2\frac{1}{2}\theta_o\,\text{sen}^2\varphi)}}$$

e quindi sarà

$$(79)\qquad t = -\sqrt{\frac{i_o^2}{gr}} \cdot \text{dig.}(\text{sen}\tfrac{1}{2}\,\theta_o,\ \varphi) + \text{costante}.$$

119. Queste ultime equazioni ci dicono che il corpo si muove come un pendolo semplice la cui lunghezza l sia

$$(80)\qquad l = \frac{i_o^2}{r} = r + \frac{i_z^2}{r},$$

che all'origine sia stato spostato di angolo θ_0 dalla verticale e lasciato libero a sè stesso senza imprimervi alcuna velocità. Se nel piano che passa pel baricentro ed è perpendicolare all'asse di sospensione, a partire dal punto O dove incontra il detto asse e lungo la retta che congiunge O col baricentro G, si prende una lunghezza $O\,O' = l$ si potrà dunque supporre in O' concentrata tutta la massa del corpo, e deviato questo punto di angolo θ_o dalla verticale il pendolo semplice che ne risulta oscillerà precisamente come oscilla il corpo proposto. La retta condotta per O' parallela all' asse di sospensione dicesi *asse dei centri di oscillazione.*

Manifestamente l è la distanza dall'asse di sospensione del suo centro di giratore minimo, e quindi l'asse di oscillazione è coniugato con quello di sospensione, di modo che se un corpo si sospende all'asse dei centri di oscillazione corrispondente a dato asse di sospensione questo diventa asse dei centri di oscillazione dell'altro e, quando all' origine siasi deviato di angolo eguale, la durata delle oscillazioni resta la stessa.

Questa durata resta ancora la stessa quando il corpo si sospenda ad assi legati fra loro dalla

$$r + \frac{i_z^2}{r} = \text{costante};$$

risulta da ciò che sono infiniti gli assi ai quali sospendendo il corpo, e deviandolo all'origine d'angoli eguali, si hanno oscilla-

zioni di eguale dovuta; se rappresentiamo con mi_x^2; mi_y^2; mi_z^2 i tre momenti d'inerzia principali, e con a_1; a_2; a_3 i coseni degli angoli che la retta condotta pel baricentro parallelamente all'asse di sospensione forma coi tre assi principali del sistema, e con r la distanza dell'asse di sospensione dal baricentro, i detti assi appartengono alla famiglia di rette rappresentata dalla

$$(81) \qquad r + \frac{a_1^2 \cdot i_x^2 + a_2^2 \cdot i_y^2 + a_3^2 \cdot i_z^2}{r} = \text{costante} = l$$

120. Dalle (80) e (81) risulta che, avvicinando l'asse di sospensione al baricentro, l va crescendo indefinitamente fino a diventare infinito per $r = o$, donde si scorge che il tempo d'una oscillazione va facendosi di più in più grande, e quindi di più in più lente si fanno le oscillazioni, a mano a mano che l'asse di sospensione va avvicinandosi al baricentro: inversamente allontanando l'asse di sospensione dal baricentro il tempo di un'oscillazione va diminuendo, e quindi vanno accelerandosi le oscillazioni, ma però solo fino ad un certo limite oltre il quale il tempo torna di nuovo ad aumentare, e quindi tornano a ritardarsi le oscillazioni. Per determinare un tal limite supponiamo che i tre momenti principali suddetti sieno disposti in ordine di grandezza crescente e si scorgerà tosto che per rendere minimo l sarà in primo luogo mestieri di rendere minima la quantità

$$a_1^2\, i_x^2 + a_2^2\, i_y^2 + a_3^2 \cdot i_z^2,$$

al che fare converrà prendere

$$a_2 = o;\ a_3 = o \quad \text{e quindi} \quad a_1 = 1,$$

poi render minima la quantità

$$r + \frac{i_x^2}{r}$$

cioè prendere

$$r = i_x.$$

La minima durata di un'oscillazione si avrà dunque sospendendo il corpo ad un asse parallelo all'asse principale del mi-

nimo momento d'inerzia e ad una distanza dall'asse stesso eguale alla radice del minimo momento d'inerzia diviso per la massa del corpo. Il tempo minimo sarà

$$(82) \qquad T = \sqrt{\frac{2i_x}{g}} \cdot \text{Dig. (sen } \tfrac{1}{2}\, \theta_0)$$

Articolo V.

Delle principali applicazioni pratiche del moto di rotazione di un sistema pesante intorno ad asse orizzontale.

121. Una delle principali applicazioni pratiche del movimento di rotazione di un corpo pesante intorno ad asse orizzontale si è la misura e la partizione del tempo, dappoichè ad eguale angolo di deviazione, o per angoli di deviazione assai piccoli, le durate delle oscillazioni sono eguali; ma quello che principalmente merita osservazione in tale riguardo si è che mediante un medesimo corpo si possono avere oscillazioni di qualunque durata più aggradi, purchè non inferiore alla minima segnalizzata al § **120**, bastando a quest'uopo variare opportunamente la distanza dell'asse di sospensione dal baricentro. Egli è sopra un tale principio che si fonda la costruzione del *metronomo*, il quale è un corpo pesante sospeso ad asse orizzontale e accomodato così da poter variare a volontà la suddetta distanza, con chè si può avere dallo stesso oscillazioni di quella durata che più piaccia ottenere; esso serve a dare il vero tempo di una composizione musicale secondo l'intendimento del suo autore.

In quanto all'influenza dell'aria sulle oscillazioni del pendolo composto, noi qui non ce ne occuperemo, perchè estranea alle nostre ricerche, e perchè la solita teoria è troppo incompleta e troppo lungi ci condurrebbero le considerazioni necessarie a farsi per sottoporre al calcolo tutte le circostanze che influiscono sulla durata delle oscillazioni stesse.

122. Una seconda applicazione di grande importanza si è l'uso della precedente teoria alla determinazione pratica dei momenti d'inerzia dei corpi; essa si fonda sulla reciprocità

che esiste fra l'asse dei centri di sospensione e quello dei centri di oscillazione, per cui sospeso il corpo all'uno o all'altro dei detti assi impiega lo stesso tempo a compiere una oscillazione. In base a ciò, volendo il momento d'inerzia di un corpo rapporto a dato asse passante pel baricentro basterà sospendere il corpo ad un asse qualunque parallelo al primo e, fattolo oscillare, contare il tempo di una delle sue oscillazioni piccolissime; ciò fatto si capovolgerà il corpo e si andrà tentando un secondo asse parallelo al primo fino a tanto che si trova quello per cui la durata di una oscillazione è la stessa di prima. Dopo ciò si misurerà la distanza dei detti due assi nonchè quella del baricentro dall'uno o dall'altro dei medesimi, e, detta l la prima ed r la seconda, sara

$$mi^2 = mr(l-r) \tag{83}$$

123. Finalmente un' altra importante applicazione si fa del moto di rotazione di un corpo pesante usandone allo scopo di assegnare la velocità iniziale dei proietti dell'artiglieria. Ciò si ottiene mediante il così detto pendolo di Robins, dal nome dell'ingegnere che pel primo lo usò; consiste esso in un solidissimo pendolo al quale si congiunge stabilmente in sistema il pezzo d'artiglieria ordinato a lanciare la palla così che riesca diretto perpendicolarmente al piano che passa per l'asse di sospensione e pel baricentro di tutto il sistema: caricato il pezzo e lanciata la palla, per l'urto impresso, il sistema devia dalla posizione di equilibrio e si pone ad oscillare compiendo oscillazioni di cui è facile misurare la durata, e deviando di un angolo, che pur si misura; ecco poi come procede il calcolo e come si ricavano i dati necessari alla determinazione della velocità iniziale della palla.

Sia m la massa del pendolo unitamente a quella del pezzo d'artiglieria congiunto in sistema con esso, μ quella del proiettile e diciamo v la sua velocità iniziale, per cui sarà μv la quantità di moto posseduta dallo stesso all' istante in cui abbandona il pezzo; questa sarà pure la quantità di moto comunicata al sistema, attesocchè il rinculo, a cagione della compressibilità della materia, non comincierà sensibilmente prima che il proiettile non abbia percorsa tutta la lunghezza del pezzo; se quindi di-

ciamo f la distanza fra l'asse di sospensione e l'asse del pezzo, pel § **111**, sarà

$$\Omega = \frac{f.\mu.v}{mi_o^2},$$

e quindi la 75, essendo $\theta_o = o$, darà

$$\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 = \frac{f^2\mu^2v^2}{m.^2 i_o^4} + \frac{2gr}{i_o^2}(\cos\theta - 1):$$

se ora diciamo θ_1 l'angolo di massima deviazione, dovendo essere $\frac{d\theta}{dt} = o$ per $\theta = \theta_1$, avremo

$$\frac{f^2\mu^2.v^2}{m^2.\, i_o^4} + \frac{2gr}{i_o^2}(\cos\theta_1 - 1) = o$$

donde

$$(84) \qquad v^2 = \frac{m^2}{\mu^2} \cdot \frac{i_o^2}{gr} \cdot \frac{g^2r^2}{f^2}(2.\text{sen}^2 \tfrac{1}{2}\theta_1)^2.$$

Per introdurre nella formula precedente solo i dati somministrati direttamente dalla esperienza si attacca una funicella alla parte inferiore del pendolo e, fattala passare per un anello fissato al terreno, si misura la lunghezza della funicella svolta durante l'ascesa del pendolo; detta questa b e detta r_1 la distanza fra l'asse di sospensione e il punto cui è attaccata la detta funicella sarà

$$2 \text{ sen } \tfrac{1}{2}\theta_1 = \frac{b}{r_1}:$$

contate poi le oscillazioni piccolissime fatte in un certo tempo e dedottone il tempo corrispondente ad una oscillazione, se diciamo questo tempo t, per la 79 sarà

$$\frac{i_o^2}{gr} = \frac{t^2}{\pi^2}:$$

finalmente attaccata una fune alla parte inferiore del pendolo e fattala passare sopra una carrucula fissa, di cui l'asse sia parallelo all'asse di sospensione, distante dallo stesso della sua distanza dal punto cui è attaccata la fune e più elevato, vi si sospende un peso tale che tenga il pendolo orizzontale, cioè in tal posizione che il suo baricentro sia alla stessa altezza dell'asse di sospensione; detto P_1 questo peso sarà

$$gmr = P_1 r_1;$$

mediante queste relazioni, detto p_1 il peso del proiettile, cioè posto $p_1 = \mu g$, la 84 dà tosto

$$v = \frac{g}{\pi} \cdot \frac{P_1}{p_1} \cdot \frac{b}{f} \cdot t \tag{85}$$

Invece di sospendere il pezzo d'artiglieria al pendolo si potrebbe porlo in grande vicinanza allo stesso e sparare la palla contro il pendolo, che si fa di tal massa che la palla non giunga a forarlo ma si arresti a far parte dello stesso; in tal caso la quantità di moto comunicata sarà ancora sensibilmente μv se il pezzo è assai vicino, ed f si avrà dal solco lasciato dalla palla. Il metodo è più incerto attesa la resistenza dell'aria.

CAPO VI.

Moto di rotazione intorno ad un punto

Articolo I.

Formule fondamentali.

124. Quando un corpo si muove intorno ad un punto fisso allora il suo moto ad ogni singolo istante si riduce ad una rotazione intorno ad asse passante pel punto medesimo, che dicesi *asse istantaneo di rotazione* non rimanendo esso tale che per la durata di quel solo istante; scorso questo, varia e l'asse e la velocità angolare, e il moto del sistema riescirà pienamente determinato assegnando, per un tempo qualunque, l'asse istantaneo, la sua posizione assoluta nello spazio e la velocità angolare con cui, al detto tempo, il corpo ruota intorno all'asse medesimo.

A un dato tempo t il corpo sarà dunque dotato di una determinata rotazione intorno ad asse pure determinato, e possederà quindi una certa quantità di moto riducibile ad un'unica quantità di moto e ad un unico giratore di quantità di moto, che si ridurrà ad un giratore soltanto se la riduzione si farà così che la quantità di moto passi pel punto fisso e rimanga quindi elisa dalla resistenza opposta dal punto medesimo: nell'istante dt, immediatamente successivo, varierà la rotazione e l'asse, e a far variare tanto l'una quanto l'altro, concorrono la reazione dell'inerzia e l'azione delle forze operanti sul sistema durante l'istante stesso, di modo che alla fine del tempo $t + dt$ avrà variato la quantità di moto di cui sarà dotato il sistema, e quindi varierà il giratore che la rappresenta, e varierà del giratore di quantità di moto che le cause accennate ingenerano durante il tempo medesimo ogni qual volta si riducano ad una forza unica passante pel punto fisso e ad un unico giratore. A

porre il problema in equazione basterà dunque assegnare il giratore suddetto ed eguagliare la sua variazione nel tempo dt al giratore che, nel tempo stesso, si genera per l'azione delle cause predette. Ora

125. Dal § 64 del Capo III° apprendiamo che il giratore di quantità di moto, il quale, unitamente alla quantità di moto risultante, rappresenta la quantità di moto di cui è animato un sistema che alla fine del tempo t ruota con velocità angolare w intorno a dato asse è risultante dei tre giratori

$$-mw\left(i\lambda_{xz}+ac\right);\quad -mw\left(i\lambda_{yz}+bc\right);\quad mw\left(i_z^2+a^2+b^2\right)$$

dove a, b e c sono le coordinate del punto O dell'asse per cui si conduce a passare la quantità di moto risultante, e gli assi sono presi così che l'origine sia nel baricentro, che l'asse Z sia parallelo all'asse di rotazione, e che il piano XZ sia il piano che passa pel baricentro e per l'asse. Se ora si trasporti l'origine delle coordinate nello stesso punto O predetto e si ritenga la medesima direzione degli assi, pei §§ 29, 30 i tre giratori precedenti si riducono ai tre

$$-mwi\lambda_{xz};\quad -mwi\lambda_{yz};\quad mwi_z^2$$

dove gli integrali si intendono riportati alla nuova origine. Il giratore così ottenuto si può ancora considerare come risultante dei due mG_o diretto secondo l'asse di rotazione, ed mG_ρ diretto perpendicolarmente allo stesso, essendo

$$mG_o = mwi_z^2;\qquad mG_\rho = mw.\sqrt{\left\{(i\lambda_{xz})^2+(i\lambda_{yz})^2\right\}}$$

$$\cos.\widehat{G_\rho X} = -\frac{i\lambda_{xz}}{G_\rho}w;\qquad \cos\widehat{G_\rho Y} = -\frac{i\lambda_{yz}}{G_\rho}w\,.$$

Ora essendo l'equazione dell'elissoide d'inerzia relativo al punto O, § 77

$$i_x^2.x^2+i_y^2.y^2+i_z^2.z^2-2\,i\lambda_{xy}.xy-2\,i\lambda_{xz}.xz-2\,i\lambda_{yz}.yz=k^4$$

e quella del suo piano tangente nel punto di coordinate $x=o$; $y=o$; $z=\frac{k^2}{i_z}$, nel quale esso è incontrato dall'asse di rotazione,

$$i_z^2 . z - i\lambda_{xz} . x - i\lambda_{yz} . y = \frac{k^2}{2} . i_z$$

così risulta che il giratore di quantità di moto è perpendicolare a questo piano, e quindi

« L'asse di rotazione corrispondente a dato giratore di quantità di moto, quando la quantità di moto risultante, che insieme ad esso rappresenta la quantità di moto di cui è dotato il sistema, si conduca a passare per un punto qualunque O dell'asse di rotazione, è il diametro dell'elissoide d'inerzia, corrispondente allo stesso punto O, che è coniugato al piano diametrale perpendicolare al giratore stesso ».

126. Egualmente pel § 88 del Capo IV, le forze motrici dovute alla reazione dell'inerzia, condotta la loro risultante a passare essa pure pel predetto punto O dell'asse di rotazione, e posta quivi l'origine delle coordinate, saranno rappresentate da una forza motrice passante per O e da un giratore motore risultante dai due $m w^2 i\lambda_{yz}$ parallelo ed opposto ad X, ed $m w^2 i\lambda_{xz}$ parallelo e diretto nello stesso senso di Y, i quali composti in uno somministrano il giratore motore

$$m g = m w^2 \sqrt{\{(i\lambda_{xz})^2 + (i\lambda_{yz})^2\}}$$

essendo

$$\cos . \widehat{gX} = - \frac{i\lambda_{yz}}{g} w^2; \qquad \cos . \widehat{gY} = \frac{i\lambda_{xz}}{g} w^2,$$

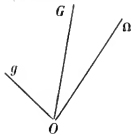
le quali ci dicono che quest'ultimo giratore è perpendicolare a G_ρ e quindi perpendicolare al piano che passa per l'asse di rotazione e pel giratore di quantità di moto, e che ha con mG_ρ un rapporto eguale ad w. Questo giratore, per quanto si è detto, giacerà nel piano perpendicolare al giratore di quantità di moto, e quindi

« Il giratore acceleratore dovuto alla reazione dell'inerzia, quando la forza acceleratrice risultante sia fatta passare per un punto O dell'asse di rotazione, giace sempre nel piano dia-

metrale che è coniugato coll' asse di rotazione dell' elissoide di inerzia corrispondente allo stesso punto O».

127. Pel fatto della rotazione nell'istante dt, a cagione della reazione dell'inerzia, forze centrifughe, vengono comunicate al sistema delle quantità di moto che, condotte a passare pel punto O, si riducono ad una quantità di moto passante per O e ad un giratore di quantità di moto $mg.dt$, il quale giace nel piano perpendicolare al giratore di quantità di moto che, insieme alla quantità di moto passante pure per O, rappresenta le quantità di moto che animano il sistema al principio dell'istante dt e che è coniugato coll'asse intorno a cui ruotava il sistema al principio dell'istante medesimo; ora l' asse di rotazione coniugato a questo giratore dovendo essere il diametro dell'elissoide d'inerzia corrispondente al punto O, coniugato col piano che passa pel giratore di quantità di moto e per l'asse di rotazione al principio dell'istante dt, ed essendo il diametro coniugato con un piano coniugato a tutte le rette giacenti nel piano stesso, così il detto asse sarà coniugato coll'asse originario di rotazione e giacerà quindi esso pure nel piano condotto per O perpendicolarmente al giratore originario di quantità di moto; ne discende che

« L'asse di rotazione intorno a cui ad ogni istante il sistema tende a girare per l'azione delle forze centrifughe giace nel piano perpendicolare al giratore delle quantità di moto possedute dal sistema al principio dell'istante medesimo ».

128. Abbiasi ora un sistema rigido fisso ad un punto O e

supponiamo che alla fine del tempo t le quantità di moto dalle quali trovasi animato sieno rappresentate da una quantità di

moto risultante passante per O, e quindi distrutta dalla resistenza del punto, e da un giratore di quantità di moto OG; si supponga nota la posizione del sistema e quindi la posizione dei tre assi permanenti rapporto al punto O; scomposto il giratore OG in tre secondo i detti assi sieno essi rispettivamente mG_x; mG_y; mG_z e sia $O\Omega$ l'asse di rotazione ed w la velocità angolare; dette w_x; w_y; w_z le tre componenti di w secondo i tre assi, dal § 125, ricordando essere $i\lambda_{xy} = o$; $i\lambda_{xz} = o$; $i\lambda_{yz} = o$, si ricaverà tosto

$$(86) \qquad w_x = \frac{G_x}{i_x^2}; \qquad w_y = \frac{G_y}{i_y^2}; \qquad w_z = \frac{G_z}{i_z^2}$$

e quindi

$$(87) \qquad w^2 = w_x^2 + w_y^2 + w_z^2$$

e

$$(88) \cos . \widehat{G\Omega} = \frac{G_x.w_x + G_y.w_y + G_z.w_z}{G.w} = \frac{i_x^2.w_x^2 + i_y^2.w_y^2 + i_z^2.w_z^2}{G.w}$$

mediante le quali relazioni dato G si avrà $O\Omega$ ed w, e inversamente.

129. Nel tempo dt per la rotazione w intorno all'asse $O\Omega$ si sviluppa un giratore motore Og perpendicolare al piano ΩOG ed eguale in intensità ad $mG_\rho.w$, § 126, il quale agendo per la durata del tempo dt comunica al sistema una quantità di moto elisa dalla resistenza del punto O, ed un giratore di quantità di moto diretto pure come Og ed eguale ad $m\,G_\rho . w . dt$; sarà dunque

$$g = G_\rho . w = G . \text{sen}\, \widehat{G\Omega} . w$$

e quindi

$$g^2 = G^2 w^2 - G^2 . \cos^2 . \widehat{G\Omega} . w^2$$

ossia

$$g^2 = (G_x^2 + G_y^2 + G_z^2)(w_x^2 + w_y^2 + w_z^2) - (G_x.w_x + G_y.w_y + G_z.w_z)^2$$

ossia ancora

$$(89) \quad g^2 = (G_y.w_z - G_z.w_y)^2 + (G_z.w_x - G_x.w_z)^2 + (G_x.w_y - G_y.w_x)^2$$

essendo poi l'equazione del piano ΩOG

$$(G_y.w_z-G_z.w_y).x+(G_z.w_x-G_x.w_z)y+(G_x.w_y-G_y.w_x)z=o$$

e dovendo essere g perpendicolare a questo piano sarà

$$g.\cos.\widehat{gX}=G_y.w_z-G_z.w_y; \quad g.\cos.\widehat{GY}=G_z.w_c-G_x.w_z;$$

$$g.\cos\widehat{GZ}=G_x.w_y-G_y.w_x$$

ossia per le (86)

$$(90)\; g.\cos.\widehat{gX}=(i_y^2-i_z^2)w_y.w_z; \quad g.\cos.\widehat{GY}=(i_z^2-i_x^2)w_x.w_z;$$

$$g.\cos.\widehat{gZ}=(i_x^2-i_y^2)w_x.w_y$$

le quali somministrano i tre componenti del giratore acceleratore dovuto alle forze centrifughe, i quali agendo per un tempo dt comunicano al sistema i tre giratori seguenti di quantità di moto

$$(i_y^2-i_z^2)w_y.w_z.dt; \quad (i_z^2-i_x^2)w_x.w_z.dt; \quad (i_x^2-i_y^2)w_x.w_y.dt$$

130. Se finalmente diciamo X; Y; Z le tre componenti delle forze acceleratrici sollecitanti l'elemento generico Δm di coordinate x, y, z, e trasportiamo queste forze al punto fisso, e così facciamo per tutte le forze sollecitanti tutti gli elementi del sistema, avremo i tre giratori acceleratori.

$$\frac{1}{m}\Sigma(Z.y-Y.z)\Delta m; \quad \frac{1}{m}\Sigma(X.z-Z.x)\Delta m; \quad \frac{1}{m}(Y.x-X.y)\Delta m$$

i quali durante il tempo dt comunicheranno al sistema i tre giratori di quantità di moto

$$dt.\frac{\Sigma(Z.y-Y.z)\Delta m}{m}; \quad dt.\frac{\Sigma(Xz-Z.x)\Delta m}{m}; \quad dt.\frac{\Sigma(Y.x-Xy.)\Delta m}{m}.$$

131. Per l'azione dunque delle forze acceleratrici operanti sul sistema e per la reazione dell'inerzia, durante il tempo dt i tre giratori di quantità di moto secondo i tre assi aumentano rispettivamente delle quantità.

$$m\,(i_y^2-i_z^2)\,w_y.w_z.dt+dt.\Sigma\,(Z.y-Y.z)\,\Delta m$$

$$m\,(i_z^2-i_x^2)\,w_x.w_z.dt+dt.\Sigma\,(X.z-Z.x)\,\Delta m$$

$$m\,(i_x^2-i_y^2)\,w_x.w_y.dt+dt.\Sigma\,(Y.x-X.y)\,\Delta m$$

ma d'altra parte essi aumentano rispettivamente delle quantità

$$m.d.G_x; \quad m.d.G_y; \quad m.d.G_z,$$

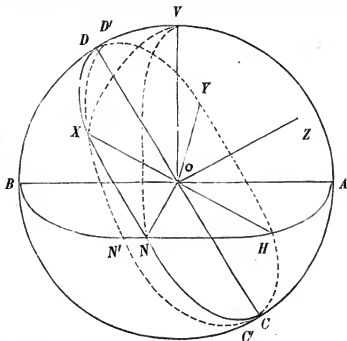
che per le (86) diventano

$$m.i_x^2.dw_x; \quad m.i_y^2.d.w_y; \quad m.i_z^2.dw_z,$$

dunque sarà

$$(91) \quad \begin{cases} i_x^2.dw_x = (i_y^2 - i_z^2)w_y.w_z.dt + dt.\dfrac{\Sigma(Z.y - Y.z)\Delta m}{m} \\ i_z^2.dw_y = (i_z^2 - i_x^2)w_x.w_z.dt + dt.\dfrac{\Sigma(X.z - Z.x)\Delta m}{m} \\ i_z^2.dw_z = (i_x^2 - i_y^2)w_x\,w_y.dt + dt.\dfrac{\Sigma(Y.x - X.y)\Delta m}{m} \end{cases}$$

Sono queste le tre equazioni note sotto il nome di equazioni di Eulero, perchè introdotte pel primo da questo celebre matematico.

132. Allo scopo di avere poi ad ogni istante la posizione

del corpo nello spazio riferiremo il corpo stesso ad un piano fisso *ANB* passante pel punto fisso *O*, e presa in questo piano

una fondamentale OH diremo

θ l'angolo che il piano CND degli assi permanenti OX, OY forma alla fine del tempo t col predetto piano;

Ψ l'angolo che l'intersezione ON del piano degli assi permanenti X, Y col piano fisso forma colla fondamentale OH.

φ l'angolo NOX che l'asse permanente X forma colla intersezione ON del piano degli assi XY col piano fisso.

Si consideri ora una sfera avente il centro nel punto fisso e per raggio l'unità, e sia ANB l'arco di cerchio massimo secondo cui essa è tagliata dal piano fisso, e CND quello secondo cui è tagliata dal piano degli assi XY, sarà

$$D\widehat{N}B = \theta; \qquad HN = \Psi; \qquad NX = \varphi$$

Ora per la rotazione $w_x . dt$ intorno all'asse OX il piano $CNXD$ muterà di luogo portandosi in $C'N'XD'$ e sarà

$$XN'B = \theta + \delta . \theta; \qquad HN' = \Psi + \delta . w; \qquad N'X = \varphi + \delta . \varphi$$

rapresentando con δ la variazione parziale che le predette quantità subiscono in questo caso. Considerando ora il triangolo sferico XNN' si avrà

$$\frac{\text{sen} . NN'}{\text{sen} . NX} = \frac{\text{sen} . N'XN}{\text{sen} . XN'N}$$

$$\frac{\text{sen}\, XN'}{\text{sen} . XN} = \frac{\text{sen} . XNN'}{\text{sen} . XN'N}$$

$$\cos . N'NX = \frac{\cos . N'X - \cos . NX . \cos . NN'}{\text{sen} . NX . \text{sen} . NN'}$$

ponendo in queste equazioni i valori predetti e trascurando gli infinitesimi d'ordine superiore si avrà

$$\delta . \Psi = \frac{\text{sen}\,\varphi}{\text{sen}\,\theta} . w_x . dt; \quad \delta\varphi = -\frac{\cos\theta . \text{sen}\varphi}{\text{sen}\theta} . w_x . dt;$$

$$\delta . \theta = \cos\varphi . w_x . dt$$

Per avere poi le variazioni prodotte dalla rotazione $w_y . dt$ in-

torno l'asse OY basterà evidentemente porre nelle precedenti $90^\circ + \varphi$ in luogo di φ e mutare w_x in w_y; sarà quindi

$$\delta\Psi = \frac{\cos\varphi}{\text{sen}\theta} \cdot w_y \cdot dt\,; \quad \delta\varphi = -\frac{\cos\theta \cdot \cos\varphi}{\text{sen}\theta} \cdot w_y \cdot dt\,;$$

$$\delta\theta = -\text{sen}\varphi \cdot w_y \cdot dt$$

finalmente per la rotazione $w_z \cdot dt$ intorno all'asse Z, non variando che la sola φ della quantità $w_z \cdot dt$, sarà

$$\delta\Psi = o\,; \quad \delta\,.\,\varphi = w_z \cdot dt\,; \quad \delta\theta = o\,;$$

essendo finalmente la variazione totale eguale alla somma delle variazioni parziali sarà

$$(92) \quad \begin{cases} d\theta = \left(w_x \cdot \cos\varphi - w_y \cdot \text{sen}\varphi\right) \cdot dt \\ d\Psi = \dfrac{w_y \cdot \cos\varphi + w_x \cdot \text{sen}\varphi}{\text{sen}\theta} \cdot dt \\ d\varphi = w_z \cdot dt - \dfrac{\cos\theta}{\text{sen}\theta} \cdot \left(w_x . \text{sen}\varphi - w_y . \cos\varphi\right) . dt \end{cases}$$

dalle quali si ha tosto

$$(93) \quad \begin{cases} w_x \cdot dt = \text{sen}\varphi \cdot \text{sen}\theta\, d\Psi + \cos\varphi \cdot d\theta \\ w_y \cdot dt = \cos\varphi \cdot \text{sen}\theta \cdot d\Psi - \text{sen}\varphi \cdot d\theta \\ w_z \cdot dt = d\varphi + \cos\theta \cdot d\Psi. \end{cases}$$

Articolo II.

Principii e teoremi fondamentali.

133. Un primo integrale delle equazioni (91) si ottiene tosto moltiplicandole rispettivamente per w_x; w_y, w_z e sommandole. Infatti con ciò si ottiene

$$i_x^2 . w_x . dw_x + i_y^2 . w_y . dw_y + i_z^2 . w_z . dw_z = w_x . dt \cdot \frac{\Sigma(Zy - Yz)\Delta m}{m}$$
$$+ w_y . dt \frac{\Sigma(Xz - Zx)\Delta m}{m} + w_z . dt \cdot \frac{\Sigma(Yx - Xy)\Delta m}{m}$$

ossia

$$(94)\quad \frac{m}{2}.d.\left(i_x^2.w_x^2 + i_y^2.w_y^2 + i_z^2.w_z^2 \right) =$$

$$\Sigma \left\{ X\left(w_y.z - w_z.y\right).dt + Y\left(w_z.x - w_x.z\right)dt + Z\left(w_x.y - w_y.x\right).dt \right\}$$

Ora se dicevamo $m i_o^2$ il momento d'inerzia del sistema rapporto all' asse di rotazione, è

$$i_o^2 = i_x^2 . \cos.^2 \widehat{X\Omega} + i_y^2 . \cos.^2 \widehat{Y\Omega} + i_z^2 . \cos.^2 \widehat{Z\Omega}$$

ossia, per essere,

$$\cos.\widehat{X\Omega} = \frac{w_x}{w}; \quad \cos\widehat{Y\Omega} = \frac{w_y}{w}; \quad \cos\widehat{Z\Omega} = \frac{w_z}{w}$$

$$i_o^2 . w^2 = i_x^2 . w_x^2 + i_y^2 . w_y^2 + i_z^2 . w_z^2$$

ed essendo $m i_o^2 w^2$ la forza viva di cui è dotato il sistema alla fine del tempo t, il primo membro della (94) rappresenta il differenziale della semi forza viva del sistema, ossia la quantità di cui essa aumenta nel tempo dt.

Per quanto spetta al secondo membro osserveremo che l'elemento generico Δm di coordinate x, y, z, per la sua rotazione $w_x . dt$ intorno alla posizione occupata dall'asse X alla fine del tempo t descrive nel tempo dt due spazietti infinitesimi l'uno $-w_x . dt . z$ secondo la direzione occupata da Y, e l'altro $+w_x . dt \cdot y$ secondo quella occupata da Z, e che per la rotazione $w_y\, dt$ intorno alla posizione occupata da Y descrive i due spazietti $+w_y . dt . z$ secondo quella occupata da X, e $-w_y . dt . x$ secondo quella occupata da Z; che finalmente per la rotazione $w_z\, dt$ intorno la posizione occupata da Z, descrive i due spazietti $-w_z . dt . y$; $+w_z\, dt . x$ rispettivamente secondo le direzioni occupate dagli assi X ed Y; in causa dunque delle tre rotazioni suddette descrive, secondo le direzioni occupate dagli assi alla fine del tempo t, rispettivamente i tre spazietti

$$(w_y . z - w_z . y) . dt; \; (w_z . x - w_x . z)\, dt; \; (w_x . y - w_y . x) . dt;$$

se quindi diciamo δx; δy; δz i tre spazietti precorsi nel tempo dt secondo la posizione originaria dei tre assi e quindi secondo

la direzione delle tre componenti X; Y; Z della forza acceleratrice, il secondo membro della precedente equazione diventa

$$\Sigma(\Delta m . X . \delta x + \Delta m . Y . \delta y + \Delta m . Z . \delta z),$$

ed indicando con F la forza motrice sollecitante l'elemento Δm, e con δf lo spazietto percorso secondo la sua direzione dall' elemento stesso, durante il tempo dt, il secondo membro sarà

$$\Sigma F . \delta f$$

la quale quantità rappresenta il lavoro elementare compiuto dalle forze motrici operanti sopra il sistema durante il tempo dt. La (94) dunque si trasforma nella

$$\frac{m}{2} d . i_o^2 . w^2 = \Sigma . F . \delta f ;$$

ed integrando ed estendendo l'integrale ai limiti α ed α' corrispondenti a due posizioni successive del sistema

$$(95) \qquad \frac{m}{2} . (i_o^2 . w_{\alpha'}^2 - i_o^2 . w_\alpha^2) = \left(\Sigma \int F . \delta f\right)_\alpha^{\alpha'},$$

cioè

« Nel passaggio del sistema da una sua posizione ad un'altra successiva la differenza delle semiforze vive del sistema eguaglia il lavoro sviluppato dalle forze motrici nel passaggio dall'una all'altra posizione del sistema medesimo ».

È questo il noto principio delle forze vive applicato al caso speciale che ora si considera.

134. Nel caso in cui le forze motrici sollecitanti il sistema sieno parallele fra loro si ottiene un secondo integrale delle equazioni fondamentali nel modo seguente.

Si prenda per piano fisso il piano condotto per O perpendicolarmente alla direzione delle forze, e sia OV la direzione delle forze stesse, sarà

$$\cos . X\widehat{O}V = \text{sen}\,\theta . \text{sen}\,\varphi ; \cos . Y\widehat{O}V = \text{sen}\,\theta . \cos\varphi ; \cos Z\widehat{O}V = \cos\theta$$

e quindi, se diciamo f la forza acceleratrice sollecitante l'elemento generico Δm, sarà

$$X = f . \text{sen}\,\theta . \text{sen}\,\varphi ; \quad Y = f\, \text{sen}\,\theta . \cos\varphi ; \quad Z = f . \cos\theta$$

donde tosto

$$X.\,\text{sen}\,\theta.\cos\varphi - Y.\,\text{sen}\,\theta.\,\text{sen}\,\varphi = o$$

$$Z.\,\text{sen}\,\theta.\,\text{sen}\,\varphi - X.\cos\theta = o$$

$$Y.\cos\theta - Z.\,\text{sen}\,\theta.\cos\varphi = o\,;$$

moltiplicando ora le (91) rispettivamente per $\text{sen}\,\theta.\,\text{sen}\,\varphi$; $\text{sen}\,\theta \cos\varphi$; $\cos\theta$ e sommandole, per le precedenti, avremo tosto

$$i_z^2.\cos\theta.dw_z + i_y^2.\text{sen}\theta.\cos\varphi.dw_y + i_x^2.\text{sen}\theta.\text{sen}\varphi.dw_x =$$

$$i_x^2.\,w_x.\left(w_y.\cos\theta - w_z.\,\text{sen}\theta.\cos\varphi\right).dt$$

$$+ i_y^2.\,w_y.\left(w_z\,\text{sen}\,\theta.\,\text{sen}\,\varphi - w_x.\cos\theta\right).dt$$

$$+ i_z^2.w_z.\left(w_x.\,\text{sen}\,\theta.\cos\varphi - w_y.\,\text{sen}\,\theta.\,\text{sen}\varphi.\right)dt$$

ossia per le (93)

$$i_z^2.\cos\theta.\,dw_z + i_y^2.\text{sen}\,\theta\,\cos\varphi.\,dw_y + i_x^2.\text{sen}\,\theta.\,\text{sen}\,\varphi.\,dw_x =$$

$$-i_x^2.w_x.d.(\text{sen}\theta.\,\text{sen}\,\varphi) - i_y^2.w_y.d.(\text{sen}\theta.\cos\varphi) - i_z^2.w_z.d.(\cos\theta)$$

e finalmente

$$(96)\quad i_z^2.d.(w_z.\cos\theta) + i_y^2.d.(w_y.\text{sen}\theta.\cos\varphi) + i_x^2.d.(w_x.\text{sen}\theta.\text{sen}\varphi) = o$$

ed integrando

$$(97)\quad i_z^2.w_z.\cos\theta + i_y^2.w_y.\text{sen}\theta.\cos\varphi + i_x^2.w_x.\text{sen}\theta.\text{sen}\varphi = \text{Costante}$$

la quale ci dice che « il giratore della quantità di moto parallelo alla direzione delle forze è costante durante tutto il movimento ».

135. Se nessuna forza acceleratrice anima il sistema, allora, essendo $X=o$; $Y=o$; $Z=o$, se si moltiplicano le (**91**) rispettivamente per $i_x^2.w_x$; $i_y^2.w_y$; $i_z^2.w_z$ e si sommino, si ha

$$i_x^4.\,w_x.\,dw_x + i_y^4.\,w_y.\,dw_y + i_z^4.\,w_z.\,dw_z = o$$

la quale integrata dà

$$(98) \qquad i_x^4 \cdot w_x^2 + i_y^4 \cdot w_y^2 + i_z^4 \cdot w_z^2 = \text{Costante};$$

ora per le (86) è

$$i_x^4 \cdot w_x^2 + i_y^4 \cdot w_y^2 + i_z^4 \cdot w_z^2 = G_x^2 + G_y^2 + G_z^2 = G^2$$

dunque

« Quando nessuna forza acceleratrice anima il sistema, il giratore delle quantita di moto è costante durante tutto il movimento ».

In tal caso il principio delle forze vive somministra pure

$$i_x^2 \cdot w_x^2 + i_y^2 \cdot w_y^2 + i_z^2 \cdot w_z^2 = \text{Costante}$$

e siccome per le (88) è

$$i_x^2 \cdot w_x^2 + i_y^2 \cdot w_y^2 + i_z^2 \cdot w_z^2 = G \cdot w \cdot \cos \cdot \widehat{G\Omega}$$

così sarà

$$G \cdot w \cdot \cos \cdot \widehat{G\Omega} = \text{Costante}$$

e perchè G è costante così sarà

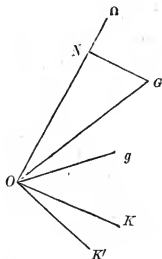
$$(99) \qquad w \cdot \cos \widehat{G\Omega} = \text{Costante}$$

cioè

« Quando nessuna forza accelaratrice anima il sistema la componente della velocità angolare secondo la direzione del giratore della quantità di moto è costante durante tutto il movimento ».

136. Nel caso particolare in cui nessuna forza acceleratrice sollecita il sistema si può dare dei due teoremi precedenti una dimostrazione geometrica semplicissima nel modo seguente.

Sia O il punto fisso, OG il giratore di quantità di moto alla fine del tempo t, ed $O\Omega$ l' asse di rotazione alla fine del tempo medesimo. Si scomponga il giratore OG in due, l'uno ON diretto secondo $O\Omega$ e l'altro OK perpendicolare ad $O\Omega$ e situato nel piano ΩOG; nel tempo dt per la rotazione $w.dt$

intorno all'asse $O\Omega$ il componente ON non muterà ed OK prenderà la posizione OK' così che riesca $K\widehat{O}K' = w.dt$; ma pel fatto della rotazione nel tempo dt si sviluppa un giratore Og perpendicolare al piano ΩOG, e quindi ad OK, tale che

imprime al sistema un giratore di quantità di moto $Og.dt$, ossia § **126**, $OK.w.dt$ diretto secondo Og; per ciò alla fine del tempo $t+dt$ il giratore di quantità di moto sarà risultante dei tre ON, OK', Og; ma OK' ed Og, per essere $OK'=OK$, $Og=OK.w.dt$; $\widehat{KOK'}=w.dt$, si compongono in OK dunque alla fine del tempo $t+dt$ il predetto giratore sarà risultante dei due ON ed OK e sarà quindi lo stesso giratore originario OG: replicandosi un tale ragionamento per tutti gli istanti successivi ne discende essere OG costante durante tutto il movimento.

Egualmente, essendo l'asse di rotazione intorno a cui tende a far girare Og, § **126**, situato nel piano perpendicolare ad OG, se si compongono le due rotazioni intorno a quest'asse e quella intorno ad $O\Omega$ in una l'estremità della retta rappresentante la stessa si troverà sopra un piano condotto per Ω perpendicolarmente ad OG, e quindi progettandola sopra OG la sua proiezione sarà costante.

Se G ed $w \cos.\widehat{G\Omega}$ sono costanti sarà pure costante il loro

prodotto $G.w.\cos \widehat{G\Omega}$, e quindi sarà pure costante la somma delle forze vive delle quali è dotato il sistema.

137. Facile riesce ora pure una dimostrazione geometrica del teorema del § 134; imperocchè, siccome per l'azione delle sole forze centrifughe il giratore di quantità di moto resta costante così, quando oltre le forze centrifughe operino sul sistema altre forze, esso non può essere influenzato che dal giratore generato dal trasporto delle dette forze al punto fisso, e quando le dette forze sieno parallele fra loro tutti i giratori che nascono dal trasporto di queste forze giaceranno nel piano condotto per O perpendicolarmente alla direzione delle forze, nel qual piano quindi giacerà pure il giratore risultante dai medesimi, ed esso sarà quindi inetto a mutare il componente del giratore parallelamente alla direzione delle forze, il quale per ciò resterà costante durante tutto il movimento.

138. Finalmente se il corpo sia di rivoluzione e sia fisso ad un punto del suo asse di figura e, o non esista alcuna forza acceleratrice, oppure sia nullo il giratore delle forze acceleratrici secondo l'asse di figura, allora la velocità angolare del sistema intorno a quest' asse è costante durante tutto il movimento.

Se infatti due dei momenti d'inerzia rapporto agli assi permanenti passanti per O sieno eguali, e sia per esempio $i_x^2 = i_y^2$; e sia di più $\Sigma\,(Y.x - Xy)\,\Delta m = o$, la terza delle (91) darà

$$dw_z = o$$

e quindi w_z costante, come si è detto.

Articolo III.

Movimento dei corpi liberi intorno ad un punto.

139. Quando il corpo fisso ad un punto qualunque non è sollecitato da alcuna forza acceleratrice, e si muove unicamente in virtù di un impulso primitivo, allora il corpo dicesi libero.

La forza che originariamente comunicò il moto al corpo, e che all'istante in cui si comincia a considerare il moto ha cessato di agire, durante la sua azione avrà accumulata nel corpo una certa quantità di moto, la quale si riduce unicamente ad un

giratore di quantità di moto una volta che le quantità di moto di cui sono animati gli elementi materiali costituenti il corpo si facciano tutte passare pel punto fisso, per essere quivi distrutte dalla resistenza del punto. Il moto impresso al sistema sarà dunque rappresentato da un certo giratore di quantità di moto dato in direzione e grandezza, il qual giratore pel § 135 dovrà restare inalterato tanto in grandezza quanto in direzione durante tutto il moto.

Un corpo si dovrebbe considerare come libero anche se fosse pesante, ossia sollecitato dalla gravità, quando il punto fisso fosse il suo baricentro, perchè riducendosi tutte le forze di gravità sollecitanti il sistema ad un' unica risultante passante pel baricentro, e restando quivi distrutta dalla resistenza del punto fisso, essa non produce altra azione oltre quella di una pressione sul detto punto, ed il corpo si trova nelle medesime condizioni di quando non è sollecitato da veruna forza.

140. Nel caso dunque ora contemplato sussisteranno i teoremi dimostrati al § 135, e quindi se esprimiamo con h una costante, la quale rappresenti la componente della velocità angolare secondo il giratore, e con G il giratore impresso, per la costanza della forza viva sarà

$$(100) \qquad i_o^2 \,.\, w^2 = i_x^2 \,.\, w_x^2 + i_y^2 \,.\, w_y^2 + i_z^2 \,.\, w_z^2 = G \,.\, h$$

e per la costanza del giratore

$$(101) \qquad i_x^4 \,.\, w_x^2 + i_y^4 \,.\, w_y^2 + i_z^4 \,.\, w_z^2 = G^2$$

Ora intorno al punto fisso O immaginiamo costruite tanto l'elissoide d'inerzia quanto la momentale, e, supponendo condotto per O quel diametro della prima che coincide coll' asse di rotazione, sia P il punto in cui incontra l'elissoide stesso e sia S il suo punto affine sull'elissoide momentale; pel § 55 sarà

$$i_o = \frac{K^2}{OP}$$

con che dalla (100) avremo

$$(102) \qquad w = \frac{\sqrt{G \,.\, h}}{K^2} \cdot OP$$

cioè

« Nel movimento di un corpo libero intorno ad un punto la velocità angolare è proporzionale al diametro dell' elissoide d'inerzia intorno a cui avviene il movimento. »

Così pure essendo

$$OS^2 = \frac{OP^2}{K^4} \cdot \frac{i_x^4 . w_x^2 + i_y^4 . w_y^2 + i_z^4 . w_z^2}{w^2} = \frac{OP^2 . G^2}{K^4 . w^2}$$

se poniamo in questa per w il suo valore si avrà

$$(103) \qquad OS = \sqrt{\frac{G}{h}} = \text{costante}$$

donde conchiudesi che

« il punto S dell'elissoide momentale che è affine al punto P in cui l'elissoide d'inerzia è incontrata dall'asse di rotazione descrive sull'elissoide momentale un elisse sferica di raggio

$$(104) \qquad r = \sqrt{\frac{G}{h}} \text{ ».}$$

141. Essendo le coordinate del punto P rispettivamente

$$\frac{w_x}{w} . OP ; \quad \frac{w_y}{w} . OP ; \quad \frac{w_z}{w} . OP$$

ossia, sostituendo ad w il suo valore (**102**),

$$\frac{K^2}{\sqrt{G . h}} . w_x ; \quad \frac{K^2}{\sqrt{G . h}} . w_y ; \quad \frac{K^2}{\sqrt{G . h}} . w_z$$

l'equazione del piano tangente l'elissoide d'inerzia nel punto P sarà, § 56,

$$(105) \qquad i_x^2 . w_x . x + i_y^2 . w_y . y + i_z^2 . w_z . z = K^2 . \sqrt{G . h} .$$

Se ora si prende l'elissoide d'inerzia così che sia

$$K = \sqrt{\frac{G}{h}} = OS$$

e lungo la direzione costante del giratore si prende un punto G tale che sia

$$OG = OS = \sqrt{\frac{G}{h}}$$

le coordinate del punto G saranno rispettivamente

$$\frac{G_x}{G} . OG ; \quad \frac{G_y}{G} . OG ; \quad \frac{G_z}{G} . OG$$

ossia per le (86)

$$\frac{i_x^2 . w_x}{\sqrt{G . h}} ; \quad \frac{i_y^2 . w_y}{\sqrt{G . h}} ; \quad \frac{i_z^2 . w_z}{\sqrt{G . h}}$$

le quali, per l'assunto valore di K soddisfacendo per la (**101**) alla (**105**), ci dicono che

« il piano tangente l'elissoide d'inerzia in ciascuno dei punti nei quali esso è incontrato dalle successive posizioni dell' asse istantaneo di rotazione passa costantemente per G; di più che l'elisse sferica descritta sull'elissoide momentale dai punti S affini ai punti P passerà essa pure costantemente per lo stesso punto G. »

142. Da quanto si è veduto sopra risulta che i punti P dell'elissoide d'inerzia determinano colla loro posizione sull'elissoide stesso e gli assi intorno ai quali succede la rotazione nei successivi istanti e le relative velocità angolari di rotazione; perquesta ragione i punti P si dicono *i poli di istantanea rotazione*, ed *elissoide polare* si dice anche l' elissoide d' inerzia; la curva poi segnata su questo elissoide dalle successive posizioni del polo P si dice *poloda*, da πολος e da ὁδος (strada del polo).

Data la grandezza e la direzione del giratore OG conosceremo sull' elissoide momentale la posizione e la grandezza del semidiametro OS, che al principio del movimento coincide con OG, e quindi segneremo sul detto elissoide l' elisse sferica di cui i punti S verranno a passare successivamente per G, la quale elisse è l' intercezione dell' elissoide momentale colla sfera di raggio OS.

Costruito poi l'elissoide d'inerzia così che riesca

$$K^2 = \frac{G}{h} = OS^2$$

se per G condurremo un piano perpendicolare ad OG questo riescirà tangente in P al detto elissoide, ed anche quando un altro punto S' dell'elisse sferica verrà in G il corrispondente punto P' dell'elissoide polare avrà il suo piano tangenziale che passerà pure per G e la velocità angolare di rotazione sarà

$$w' = h \cdot \sqrt{\frac{h}{G}} \cdot OP' = h \cdot \frac{OP'}{OS}$$

donde conchiudesi che i punti della poloda vengono successivamente a situarsi sul piano fisso condotto per G perpendicolarmente al giratore G e ciascun semidiametro OP' diventa asse di istantanea rotazione quando il polo P' tocca quel piano, sul quale la poloda si sviluppa in un'altra curva che dicesi *erpoloda*, da ἑρπω (strada serpeggiante del polo), per la forma serpeggiante che viene generalmente presentata dalla stessa.

Risulta pure che, essendo retti tutti gli angoli OGP, la velocità angolare di rotazione è risultante di due velocità l'una h costante intorno al giratore OG, e l'altra

$$h\sqrt{\frac{h}{G}} \cdot GP,$$

cioè, proporzionale al corrispondente raggio GP dell'erpoloda.

143. Ora ecco come può immaginarsi il movimento del corpo; dato il punto fisso e costruito il corrispondente elissoide d'inerzia così che sia

$$K^2 = \frac{G}{h}$$

si faccia astrazione dal corpo e non si consideri più che questo elissoide; allora se, condotto il giratore di impulso, si prenda sullo stesso una lunghezza

$$OG = \sqrt{\frac{G}{h}}.$$

e si conduca per G un piano perpendicolare ad OG, che riescirà tangente all' elissoide predetto, il corpo si muove come questo elissoide quando, tenendo fermo il suo centro, lo si faccia ruzzolare sul detto piano, senza scorrimento, e così che la velocità angolare intorno al diametro che passa pel punto di contatto col piano sia proporzionale alla lunghezza del diametro stesso.

Si possono anche immaginare invece i due coni aventi i vertici in O e dei quali l'uno abbia per base la erpoloda e l' altro la poloda; e allora tenuto fisso il primo basterà far ruzzolare l'altro su questo senza scorrimento, e così che la velocità angolare sia proporzionale al corrispondente diametro della poloda.

144. Da quanto abbiamo detto risulta tutto essere ricondotto alla determinazione della poloda, dell'erpoloda e della posizione occupata sulle stesse curve dal polo P a un dato istante qualunque. Ora descrivendo il punto S sull' elissoide momentale l'elisse sferica di raggio $\sqrt{\frac{G}{h}}$ il polo P (§ 56) descriverà la curva intersezione dell'elissoide polare

$$(106) \qquad i_x^2 . x^2 + i_y^2 . y^2 + i_z^2 . z^2 = \frac{G^2}{h^2}$$

coll'elissoide

$$(107) \qquad i_x^4 . x^2 + i_y^4 . y^2 + i_z^4 . z^2 = \frac{G^3}{h^3};$$

e quindi se supponiamo

$$i_x^2 > i_y^2 > i_z^2$$

le proiezioni della poloda sui piani permanenti del massimo e del medio, del massimo e del minimo, e del medio e del minimo momento d' inerzia saranno rispettivamente

$$(108) \begin{cases} i_x^2 . (i_x^2 - i_z^2) . x^2 + i_y^2 . (i_y^2 - i_z^2) . y^2 = \frac{G^2}{h^2} \cdot \frac{G - i_z^2 . h}{h} \\ i_x^2 . (i_x^2 - i_y^2) . x^2 - i_z^2 . (i_y^2 - i_z^2) . z^2 = \frac{G^2}{h^2} \cdot \frac{G - i_y^2 . h}{h} \\ i_y^2 . (i_x^2 - i_y^2) . y^2 + i_z^2 . (i_x^2 - i_z^2) . z^2 = \frac{G^2}{h^2} \cdot \frac{i_x^2 . h - G}{h} . \end{cases}$$

Per la sussistenza delle predette equazioni è necessario che sia

$$G - i_z^2 . h > o; \quad G - i_x^2 . h < o$$

potendo essere indifferentemente

$$G - i_y^2 . h >=< o.$$

Supporremo che sia

$$G - i_y^2 . h > o$$

e allora le tre equazioni superiori ci dicono che la poloda si progetta sul piano del massimo e del medio momento in un'elisse; su quello del massimo e del minimo in un'iperbole il cui asse trasverso è nella direzione dell'asse permanente cui compete il massimo momento d'inerzia; e sopra quello del medio e del minimo in un'elisse avente gli assi nella direzione degli assi permanenti cui competono i predetti momenti; essa dunque costituisce sulla superficie dell'elissoide polare una specie di ruota elittica intorno all'asse del massimo momento.

Se fosse $G - i_y^2 . h < o$ basterebbe mutare l'ordine degli assi e supporre $i_z^2 > i_y^2 > i_x^2$; allora la ruota elittica predetta sarebbe invece intorno all'asse del momento minimo.

145. Per introdurre l'elemento del tempo basterà osservare che per la (102) è

$$w_x = h\sqrt{\frac{h}{G}} \cdot x; \quad w_y = h.\sqrt{\frac{h}{G}} \cdot y; \quad w_z = h.\sqrt{\frac{h}{G}} \cdot z$$

mediante le quali relazioni la prima delle equazioni fondamentali (91) somministrerà

$$dx = h\sqrt{\frac{h}{G}} \cdot \frac{i_y^2 - i_z^2}{i_x^2} . y . z . dt \tag{109}$$

la quale unitamente alle (106) porge la completa soluzione del problema.

146. Ponendo per semplicità

$$
(110)\left\{\begin{aligned}
\alpha &= \frac{G}{i_x \, . \, h\sqrt{h}} \cdot \sqrt{\frac{G - i_z^2 . h}{i_x^2 - i_z^2}} \, ; \quad \beta = \frac{G}{i_y \, . \, h\sqrt{h}} \cdot \sqrt{\frac{i_x^2 . h - G}{i_x^2 - i_y^2}} \, ; \\
\gamma &= \frac{G}{i_z \, . \, h\sqrt{h}} \cdot \sqrt{\frac{i_x^2 . h - G}{i_x^2 - i_z^2}} \, ; \quad a^2 = \frac{i_y^2 - i_z^2}{i_x^2 - i_y^2} \cdot \frac{i_x^2 . h - G}{G - i_z^2 . h}
\end{aligned}\right.
$$

si soddisfa alle (**106**) mediante il sistema di equazioni

$$
(111) \qquad x = \alpha . \sqrt{1 - a^2 \text{sen}^2 \varphi} \, ; \quad y = \beta . \text{sen} \varphi \, ; \quad z = \gamma . \cos \varphi \, ,
$$

essendo φ una variabile ausiliaria, mediante i quali valori la (**109**) diventa

$$
(112) \qquad dt = -\frac{1}{n} \frac{d\varphi}{\sqrt{(1 - a^2 \text{sen}^2 \varphi)}}
$$

essendo

$$
(113) \qquad n^2 = \frac{\{ i_x^2 - i_y^2 \} \, \{ G - i_z^2 . h \}}{i_x^2 . i_y^2 . i_z^2}
$$

quindi sarà finalmente

$$
(114) \qquad t = C - \frac{1}{n} \cdot \text{dig} \, (a, \varphi)
$$

dalla quale si avrà φ in funzione del tempo, e quindi tosto le x, y, z. Le costanti si determineranno dai noti valori delle precedenti quantità all'origine del tempo, come vedremo ben tosto.

147. Per l'erpoloda, riferita a coordinate polari, posto il polo in G sia ρ il raggio vettore e v l'anomalia, essendo

$$
\rho^2 = x^2 + y^2 + z^2 - \frac{G}{h} \, ,
$$

ponendo per brevità

$$
(115) \qquad \varepsilon^2 = \frac{G . \{ G - i_z^2 . h \} \, \{ i_x^2 h - G \}}{h^3 . i_x^2 . i_y^2} \, ; \quad l^2 = \frac{G . \{ i_y^2 - i_z^2 \}}{i_y^2 \{ G - i_z^2 h \}}
$$

sarà primamente

$$(116) \qquad \rho = \varepsilon . \sqrt{1 - l^2 . \operatorname{sen}^2 \varphi};$$

quindi, rimarcando che il diametro dell'elissoide polare OP, che alla fine del tempo t và al punto di coordinate x, y, z, scorso il tempo dt passa pel punto di coordinate $x+dx$, $y+dy$, $z+dz$, e che quindi l'area da esso descritta si progetta sui piani YOZ; XOZ; XOY nelle aree

$$\frac{1}{2}(y.dz - z.dy); \quad \frac{1}{2}.(z.dx - x.dz); \quad \frac{1}{2}(x.dy - y.dx)$$

e sul piano fisso del contatto continuo nell'area

$$\frac{1}{2}\rho^2 . dv,$$

per la proprietà delle proiezioni, avremo

$$\rho^2 . dv = (y.dz - z.dy) \cos . \widehat{GOX} + (z.dx - x.dz) . \cos . \widehat{GOY} + (x.dy - ydx) \cos . \widehat{GOZ}.$$

Ora è

$$\cos . \widehat{GOX} = \frac{G_x}{G} = \frac{i_x^2 . w_x}{G} = \frac{h}{G} \cdot \sqrt{\frac{h}{G}} \cdot i_x^2 \cdot x;$$

$$\cos . \widehat{GOY} = \frac{h}{G} \cdot \sqrt{\frac{h}{G}} \cdot i_y^2 \cdot y; \quad \cos . \widehat{GOZ} = \frac{h}{G} \sqrt{\frac{h}{G}} \cdot i_z^2 \cdot z$$

e quindi sarà

$$\frac{G}{h} \sqrt{\frac{G}{h}} \cdot \rho^2 . dv = \left(i_x^2 - i_y^2\right) x.y.dz + \left(i_z^3 - i_x\right) x.z.dy + \left(i_y^2 - i_z^2\right) . z.y.dx,$$

e per le (91), dopo posti in esse i valori di w_x; w_y; w_z espressi in funzione di x, y, z,

$$\frac{G^2}{h^3} \cdot \rho^2 \cdot \frac{dv}{dt} = \frac{\left(i_x^2 - i_y^2\right)^2}{i_z^2} \cdot x^2 . y^2 + \frac{\left(i_z^2 - i_x^2\right)^2}{i_y^2} \cdot x^2 . z^2 + \frac{\left(i_y^2 - i_z^2\right)^2}{i_x^2} \cdot z^2 y^2$$

la quale, mediante le (107) e (108) si pone assai facilmente sotto l'aspetto

$$\frac{i_x^2 \cdot i_y^2 \cdot i_z^2}{h} \cdot \rho^2 \cdot \frac{dv}{dt} = i_x^6 \cdot x^2 + i_y^6 \cdot y^2 + i_z^6 \cdot z^2 - \frac{G^4}{h^4}$$

ossia, per le (110) e (115),

$$\frac{i_z^2}{G} \cdot \rho^2 \cdot \frac{dv}{dt} = \varepsilon^2 - \frac{i_y^2 - i_z^2}{G - i_z^2 . h} \cdot h \cdot \varepsilon^2 . \text{sen}^2 \varphi ;$$

ma per la (116) è

$$\frac{i_y^2}{G} h . \rho^2 = \frac{i_y^2}{G} \cdot h . \varepsilon^2 - \frac{i_y^2 - i_z^2}{G - i_z^2 . h} \cdot h \varepsilon^2 . \text{sen}^2 \varphi$$

quindi, sottraendo questa seconda dalla prima, e ponendo

$$\Delta = \frac{G\left(G - i_z^2 . h\right)\left(G - i_y^2 . h\right)\left(i_x^2 h - G\right)}{h^3 . i_x^2 . i_y^2 . i_z^2} \tag{117}$$

sarà

$$\frac{dv}{dt} = \frac{i_y^2}{i_z^2} h + \frac{\Delta}{\rho^2}$$

e finalmente per le (116 e (112)

$$dv = \frac{i_y^2}{i_z^2} h . dt - \frac{\Delta}{n . \varepsilon^2} \cdot \frac{d\varphi}{(1 - l^2 . \text{sen}^2 \varphi) \sqrt{(1 - a^2 . \text{sen}^2 \varphi)}} \tag{118}$$

donde, integrando,

$$v = C' + \frac{i_y^2}{i_z^2} h . t - \frac{\Delta}{n . \varepsilon^2} . k\, ap.(- l^2, a, \varphi) \tag{119}$$

148. Resta ora soltanto a vedere come, mediante i dati della questione, si determinino le costanti arbitrarie G e h, e le due introdotte dalle integrazioni delle (112) e (118)).

I dati della questione saranno, 1° La natura, la forma e la posizione del corpo all'origine del movimento, nonchè quel punto che resta fermo e intorno al quale esso si aggira. 2° La quantità di moto trasmessa al corpo, la sua direzione e distanza dal punto fisso.

Coi primi dati si calcoleranno le quantità i_x^2; i_y^2; i_z^2 e la direzione originaria dei tre assi permanenti; condotto poi per O e per la direzione della quantità di moto trasmessa al corpo un piano ed una perpendicolare allo stesso questa segnerà la direzione di OG, e supponendo $\mu . u$ la quantità di moto trasmessa ed f la distanza della sua direzione dal punto fisso, sarà

$$G=\frac{\mu}{m}.u.f. \tag{120}$$

Essendo poi data la direzione iniziale dei tre assi permanenti si scomporrà G in tre secondo i detti assi, e detti rispettivamente G'_x; G'_y; G'_z sarà

$$w'_x=\frac{G'_x}{i_x^2}; \qquad w'_y=\frac{G'_y}{i_y^2}; \qquad w'_z=\frac{G'_z}{i_z^2}$$

e quindi

$$\left\{\begin{array}{l} h=\dfrac{i_x^2 . w_x'^2+i_y^2 . w_y'^2+i_z^2 . w_z'^2}{G} \\ \text{sen} . \varphi'=\dfrac{1}{\beta . h}.\sqrt{\dfrac{G}{h}}.w'_y; \quad \cos\varphi'=\dfrac{1}{\gamma . h}.\sqrt{\dfrac{G}{h}}.w'_z \end{array}\right. \tag{121}$$

dalle quali si avrà φ', e quindi la C (114) dovrà determinarsi così che per $t=o$ riesca $\varphi=\varphi'$; finalmente, supponendo di contare v della retta che congiunge il punto G colla posizione iniziale del punto di contatto dell'elissoide polare col piano fisso, la C' (119) si assegnerà così che riesca $\varphi=\varphi'$ per $v=o$

149. Merita speciale considerazione il caso in cui sia $G-i_y^2.h=o$; allora la seconda delle (108) dà direttamente

$$x=\pm\frac{i_z}{i_x}.\sqrt{\frac{i_y^2-i_z^2}{i_x^2-i_y^2}}.z$$

la quale si dice che la poloda in tal caso si riduce all'una o all'altra delle due elissi in cui l'elissoide polare è tagliato dai due piani che passano per l'asse del medio momento d'inerzia e formano col piano YZ un angolo la cui tangente è

$$\frac{i_z}{i_x} \cdot \sqrt{\frac{i_y^2 - i_z^2}{i_x^2 - i_y^2}}$$

Inoltre la quarta delle (111) dà

$$a^2 = \frac{i_y^2 - i_z^2}{i_x^2 - i_y^2} \cdot \frac{(i_x^2 - i_y^2)h}{(i_y^2 - i_z^2)h} = 1$$

con chè la (112) diventa

$$dt = -\frac{1}{n} \cdot \frac{d\varphi}{\cos\varphi}$$

donde, ponendo per brevità

$$C = \frac{1 + \text{sen}\,\varphi'}{1 - \text{sen}\,\varphi'},$$

si ha

$$\text{sen}\,\varphi = \frac{C.e^{-2nt} - 1}{C.e^{-2nt} + 1} \quad \text{e quindi} \quad \cos\varphi = 2\sqrt{C} \cdot \frac{e^{-nt}}{C.e^{-2nt} + 1}$$

quindi la (116), essendo pure $l^2 j = 1$, darà

$$\rho = 2\varepsilon\sqrt{C} \cdot \frac{e^{-nt}}{C.e^{-2nt} + 1}$$

e siccome in tal caso è $\Delta = o$ così la (118) dà

$$v = \frac{i_y^2}{i_z^2} \cdot h \cdot t$$

Risulta dunque che l'erpoloda diventa una spirale intorno al punto G, al quale essa va continuamente avvicinandosi senza mai raggiungerlo, e che in questa spirale il polo istantaneo si muove di moto uniforme.

Il moto del corpo si riduce dunque a quello di un piano che ruzzola senza strisciare sul cono che ha il vertice in O e che ha per base la spirale suddetta: l'asse istantaneo si avvolge in un piano diametrale, a partire dall' asse OY, mentre nello spazio si avvicina indefinitamente alla retta OG senza mai raggiungerla.

150. Se due dei momenti d'inerzia sono eguali, per es. se sia $i_y^2 = i_z^2$ sarà

$$a = o\,; \qquad l = o\,; \qquad \beta = \gamma$$

e quindi

$$\varphi = \varphi' - u.t\,; \qquad x = \alpha\,; \qquad y = \beta.\mathrm{sen}(\varphi' - ut)\,; \qquad z = \beta.\cos(\varphi' - ut)$$

$$p = \varepsilon\,; \qquad v = \frac{G}{i_y^2}.\,t\,; \qquad w = \text{costante}$$

cioè la poloda si riduce ad un cerchio perpendicolare, in tal caso, all' asse X ed avente il suo centro sull' asse medesimo; l' erpoloda pure si riduce ad un cerchio avente il centro nel punto G, e finalmente il moto del polo istantaneo è uniforme.

Lo stesso succederebbe se fosse $i_x^2 = i_y^2$, solo in tal caso l'asse sarebbe quello del momento minimo.

151. Se l'urto comunicato originariamente al corpo è tale da determinare una rotazione intorno ad uno qualunque dei suoi assi permanenti allora il corpo continua indefinitamente a ruotare intorno all' asse medesimo; ma vi ha un' essenziale differenza secondo che la rotazione avviene intorno i due assi del massimo o del minimo momento d'inerzia, oppure intorno all'asse del momento medio.

Se infatti all'origine del moto l'urto è tale da rendere $w'_x = o$; $w'_y = o$, per cui il corpo prenda a girare intorno all' asse Z del minimo momento d'inerzia, sarà (106) (107)

$$i_z^2 \cdot z'^2 = \frac{G^2}{h^2}\,; \qquad i_z^4 \cdot z'^2 = \frac{G^3}{h^3}$$

quindi

$$G - i_z^2 \cdot h = o$$

e la prima delle (108) diventa

$$i_x^2 \cdot \left(i_x^2 - i_z^2\right) \cdot x^2 + i_y^2 \left(i_y^2 - i_z^2\right) \cdot y^2 = o$$

la quale per essere soddisfatta esige che sia costantemente $x = o$, $y = o$, quindi $w_x = o$, $w_y = o$. Lo stesso succederebbe per la terza delle (108) se fosse originariamente $w_y' = o$; $w_z' = o$, cioè se il corpo prendesse a ruotare intorno all' asse del massimo momento d'inerzia. Se però il corpo prende a girare intorno all'asse del momento medio, cioè se sia $w_x' = o$; $w_z' = o$, la seconda delle equazioni suddette, per essere allora $G - i_y^2 \cdot h = o$, diventa

$$i_x^2 \cdot \left(i_x^2 - i_y^2\right) \cdot x^2 - i_z^2 \cdot \left(i_y^2 - i_z^2\right) \cdot z^2 = o$$

la quale è soddisfatta bensì da $x = o$, $z = o$, ma potrebbe pur esserlo da tutti i valori di x e z che soddisfanno alla

$$x = \pm \frac{i_z}{i_x} \cdot \sqrt{\frac{i_y^2 - i_z^2}{i_x^2 - i_y^2}} \cdot z\,;$$

cioè il polo di istantanea rotazione tanto potrebbe restare costantemente sul vertice corrispondente all'asse medio quanto potrebbe percorrere l' una o l' altra delle due elissi singolari accennate al § 149.

152. Per ben intendere l'essenzial differenza che esiste fra l'uno e l'altro caso immaginiamo l' elissoide polare tagliato in

quattro fusi elittici dalle due elissi singolari ora accennate, e il polo P_y dell'elissoide sarà nell'intersezione di queste due elissi, il polo P_z al centro del fuso la cui apertura è due volte l'angolo corrispondente alla tangente che il piano delle elissi singolari forma con YOZ, e il polo P_x al centro del fuso supplementare.

Se ora il polo istantaneo cade in P_y è evidente che per poco che lo si sposti va a cascare o nell'uno o nell'altro dei due fusi predetti, e quindi a descrivere la sua orbita intorno a quel vertice che sta in quello dei due fusi nel quale esso è entrato: che se, accidentalmente, spostandolo, si avesse invece a portare sopra l'una o l'altra delle due elissi suddette esso allora o descriverebbe la metà di questa elisse per andare a cascare sul polo diametralmente opposto, oppure, se si fosse spostato dall'altra parte, ritornerebbe tosto sul polo medio da cui fu allontanato. Tranne questo ultimo caso l'asse medio del corpo non ha alcuna stabilità, laddove se il polo istantaneo cade sopra l'uno o l'altro dei due vertici P_x e P_z può essere spostato dal vertice stesso per tutta l'estensione del fuso corrispondente senza cessare per ciò di descrivere la sua orbita intorno al vertice stesso.

153. In qualche modo il grado di stabilità della rotazione intorno ad un asse può valutarsi dalla grandezza dello spostamento che può subire il polo istantaneo dal vertice di detto asse, senza cessare per ciò di descrivere la propria orbita intorno all'asse medesimo, e allora un tale grado di stabilità dipenderà dalla grandezza del fuso elittico relativo all'asse che si considera. Così considerando le cose può ben dirsi instabile la rotazione intorno all'asse del medio momento d'inerzia e stabile, ma però in differente grado, la rotazione intorno agli altri due, dipendendo il relativo grado di stabilità loro dalla forma particolare del corpo. Se, infatti, il corpo sia tale che il suo massimo momento d'inerzia differisca pochissimo dal medio e questo differisca molto dal minimo il fuso elittico relativo all'asse del massimo momento sarà ristrettissimo, mentre sarà assai grande quello corrispondente all'asse del momento minimo, dal cui vertice per ciò il polo istantaneo potrà subire anche un grande spostamento, locchè non potrebbe

essere per l'asse del masssimo momento senza che il detto polo non andasse a descrivere la sua orbita intorno all'altro.

154. Non è poi esatto il dire che se l'asse istantaneo è allontanato alcun poco dall'asse cui corrisponde il massimo o il minimo momento d'inerzia non farà che oscillazioni piccolissime intorno all'asse stesso durante tutto il movimento, perchè per es. nel caso ora accennato anche per un piccolo spostamento potrebbe portarsi a girare intorno all'altro asse; oppure, anche spostato dentro al fuso elittico che gli corrisponde, può ancora descrivere in questo fuso un'orbita molto allungata, e far quindi delle oscillazioni fortissime dall'una e dall'altra parte dell'asse dal quale è stato allontanato.

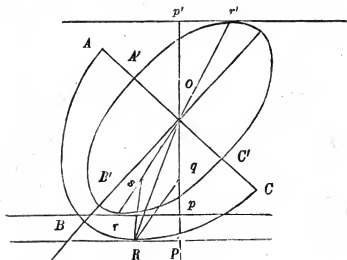
Ne discende che nei corpi in cui uno dei momenti estremi d'inerzia differisce assai poco dal momento medio, e nei quali perciò l'elissoide d'inerzia è quasi di rivoluzione intorno ad uno dei suoi assi, la stabilità della rotazione non è propriamente assicurata se non per questo asse. Se il corpo è di rivoluzione allora la stabilità non ha luogo che per l'asse di rivoluzione, e soltanto sarebbe stabile la rotazione intorno ad un asse qualunque giacente nel piano del suo equatore; cioè quando il corpo prenda a girare intorno ad un asse qualunque situato nel piano del suo equatore e quest'asse venga spostato, conservandolo però nel piano stesso; allora il corpo girerà intorno al nuovo asse continuando sempre a girare intorno all'asse medesimo, ma allora i detti assi, più che *stabili*, dovrebbero dirsi *indifferenti*.

Così pure se, i tre momenti d'inerzia essendo eguali, l'elissoide polare diventa una sfera, allora tutti gli assi sono indifferenti, perchè se l'asse istantaneo sia spostato esso resta nella nuova posizione e ritorna immobile tanto nel corpo quanto nello spazio.

Queste importantissime osservazioni, che tanta luce spargono sull'argomento, si devono originariamente al *Poinsot*.

155. La soluzione data precedentemente non ha che un solo inconveniente, quello cioè di non mettere in evidenza l'elemento del tempo; ma dobbiamo al prof. Sylvester un'importantissima osservazione mediante cui un tale elemento può rappresentarsi meccanicamente, dal che riesce assolutamente com-

pletata la soluzione del Poinsot. Rimandando il lettore alla memoria originale del predetto autore, che trovasi inserita nel volume 156, parte seconda, delle *Transazioni filosofiche della Reale Società di Londra*, qui mi accontenterò di riportare quella sola parte che serve allo scopo accennato, pel chè non ho d'uopo che di ricordare il seguente teorema: «se più piani paralleli toccano una serie di elissoidi confocali il luogo dei loro punti di contatto è un'iperbole equilatera che ha per assintoto la perpendicolare ai piani tangenti condotta dal loro centro comune».

156. Sieno ABC, $A'B'C'$ due elissoidi confocali, rappresentanti cinematici di due sistemi rigidi posti in movimento da uno

stesso giratore di impulso G diretto secondo la OP, e tali che in essi sia il $K=1$. Prendendo

$$(122) \qquad OP=\sqrt{\frac{h}{G}}, \qquad Op=\sqrt{\frac{h'}{G}},$$

essendo h ed h' le proiezioni sul giratore delle velocità angolari comunicate ai due sistemi dallo stesso giratore G, e conducendo per P e p i due piani tangenti ai due elissoidi, sieno R ed r i punti di contatto cogli elissoidi predetti alla fine del

tempo t, per cui i due sistemi ruoteranno allora intorno i diametri OR ed Or con velocità angolari

$$(123) \qquad w = G \, . \, OP \, . \, OR; \qquad w' = G \, . \, Op \, . \, Or$$

Ora detta λ^2 la differenza fra i quadrati dei semi-assi dei predetti elissoidi ed i_x^2; i_y^2; i_z^2 i tre momenti d'inerzia del sistema rappresentato dal primo, ed (i_x^2); (i_y^2); (i_z^2) quelli del sistema rappresentato dal secondo sarà

$$(i_x^2) = \frac{i_x^2}{1 - \lambda^2 i_x^2}; \quad (i_y^2) = \frac{i_y^2}{1 - \lambda^2 i_y^2}; \quad (i_z^2) = \frac{i_z^2}{1 - \lambda^2 i_z^2}$$

e quindi per la (120)

$$(124) \qquad h' = h - \lambda^2 G$$

la quale, unitamente alle (122), somministra

$$(125) \qquad \overline{OP}^2 - \overline{Op}^2 = \lambda^2;$$

di più, pel teorema accennato sopra, appartenendo R ed r ad un'iperbola equilatera di cui OP è un assintoto, sarà

$$(126) \qquad OP \, . \, PR = Op \, . \, pr$$

157. Ora giacendo OP; OR; Or in uno stesso piano si può scomporre la velocità angolare w intorno ad OR in due, l'una s intorno ad Or e l'altra q intorno ad OP, ed essendo

$$w = G \, . \, OP \, . \, OR$$

sarà

$$s = G \, . \, OP \, . \, Os; \qquad q = G \, . \, OP \, . \, Oq$$

ossia

$$(127)\quad s=G.OP.Or.\frac{Os}{Or}=G.Or.OP.\frac{RP}{rp}=G.Op.Or=w'$$

$$(128)\quad q=G.OP.(OP-Pq)=G.OP\left(OP-\frac{PR}{tg.rop}\right)$$

$$=G.OP\left(OP-Op.\frac{PR}{pr}\right)=G.OP(OP-Op)\frac{Op}{OP}$$

$$=G(\overline{OP}^2-\overline{Op}^2)=G.\lambda^2$$

Il moto dunque del corpo rappresentato dall'elissoide ABC differisce da quello del corpo rappresentato dall'elissoide $A'B'C'$ unicamente per la rotazione $G\lambda^2$ intorno alla direzione OP del giratore d'impulso; ossia, in altre parole, il moto del corpo rappresentato dall'elissoide ABC può considerarsi scomposto in due movimenti, cioè nella rotazione w' intorno all'asse Or e nella rotazione $G\lambda^2$ intorno all'asse OP. Se dunque a rappresentare il sistema invece dell'elissoide ABC si assume l'elissoide $A'B'C'$, che gli è confocale con differenza λ^2, il movimento del detto corpo sarà rappresentato da una rotazione varia intorno Or proporzionale ad Or, e da una rotazione costante intorno OP proporzionale a λ^2, donde discende un facile modo di rappresentare eziandio l'elemento del tempo.

158. Si tolga all'ellissoide d'inerzia rappresentativo del sistema la sua parte superiore e vi si sostituisca il segamento d'elissoide confocale a differenza λ^2; ciò fatto si appoggi la superficie inferiore sopra un piano scabro assolutamente fisso, e si porti in contatto colla sua parte superiore una piastra parallela al detto piano e girante intorno ad asse passante per O e perpendicolare ai due piani; mentre colla mano, o con un mezzo meccanico qualunque, il corpo si fa girare come una trottola sopra il piano più basso esso girerà pure sopra la piastra superiore e contemporaneamente, per l'attrito, la spingerà a girare intorno al predetto asse, e l'angolo di rotazione intorno quest'asse darà la esatta misura del tempo che il corpo libero, cinematicamente rappresentato dall'elissoide inferiore,

occuperà nel passare da una sua posizione ad un' altra. Un tale angolo può facilmente misurarsi mediante una mostra, o quadrante, fissa immediatamente al di sopra della piastra ruotante ed un indice segnato su questa; se l'angolo corso sia φ il tempo corrispondente sarà $\frac{\varphi}{G\lambda^2}$. È anche importante osservare che il denominatore $G\lambda^2$ è indipendente dalla posizione originaria del corpo, e quindi, supponendo che il piano e la piastra ruotante sieno capaci di un preliminare accomodamento così da poter essere posti ad una qualunque distanza l'uno dall'altro, l'elissoide d'inerzia può farsi partire da qualunque posizione più piaccia, e resterà invariabile il valore della divisione del quadrante che registra il tempo.

159. Dal teorema dimostrato al § 157 risulta che se una serie di sistemi rigidi B; B_1; B_2 ecc. è così costituita che i loro rappresentanti cinematici sieno elissoidi d'inerzia confocali con differenze λ_1^2; λ_2^2 ecc., e sieno originariamente disposti così che i loro assi permanenti sieno paralleli, se vengano posti in movimento da un medesimo giratore d'impulso G, dopo scorso un qualunque tempo t, gli assi permanenti di tutti i detti sistemi conservano un eguale inclinazione col giratore predetto, e possono essere ricondotti paralleli girando i medesimi sistemi intorno il giratore di angoli proporzionali al tempo, cioè rispettivamente degli angoli $G\lambda_1^2 t$; $G\lambda_2^2 t$; ecc.

Analogo teorema esiste pei sistemi rappresentati da elissoidi contro-focali, cioè tali che la somma dei quadrati dei loro semiassi sia la stessa; ma rimandando per esso alla memoria citata mi accontenterò di dimostrare qui che, nel caso contemplato, la differenza fra i quadrati delle velocità angolari di due qualunque dei predetti sistemi è costante. Infatti dalle (123) si ha

$$w^2 - w_1^2 = G^2 \left(\overline{OP}^2 . \overline{OR}^2 - \overline{Op}^2 . \overline{Or}^2 \right)$$

$$= G^2 \left\{ \overline{OP}^2 \left(\overline{OR}^2 - \overline{OP}^2 \right) - \overline{Op}^2 \left(\overline{Or}^2 - \overline{Op}^2 \right) \right\} + G^2 \left(\overline{OP}^4 - \overline{Op}^4 \right)$$

$$= G \left(\overline{OP}^2 . \overline{PR}^2 - \overline{Op}^2 . \overline{pr}^2 \right) + G^2 \left(\overline{OP}^2 + \overline{Op}^2 \right) \left(\overline{OP}^2 - \overline{Op}^2 \right)$$

ossia per le (125) e (126)

$$(129) \qquad w^2 - w_1^2 = G^2\lambda^2\left(\overline{OP}^2 + \overline{Op}^2\right) = G\,.\,\lambda^2(h + h')$$

Q. E. D.

Nota.

Dovendo il presente libro servire all'istruzione principalmente de' miei giovani allievi, ho creduto opportuno di non dilungarmi troppo dagli usuali metodi di calcolo, dubitando altrimenti di introdurre nozioni che la ristrettezza del tempo non permette di poter sviluppare completamente nella scuola. Ad istruzione però di quelli che, per avventura, fossero maggiormente inoltrati nel calcolo reputo non soverchio di riportare qui in nota un'altra soluzione dello stesso problema da raccomandarsi principalmente sotto l'aspetto analitico.

Indicando coi simboli

$$(a) \begin{cases} \theta_3(u,\nu) = \sum_{-\infty}^{\infty} e^{-\nu . s^2} . \cos . 2su\,; \quad \theta_2(u,\nu) = \sum_{-\infty}^{\infty} e^{-(\nu + \frac{1}{2})^2} . \cos(2s+1).u \\ \theta_1(u,\nu) = \theta_2\left(\frac{\pi}{2} - u, \nu\right)\,; \quad \theta(u, \nu) = \theta_3\left(\frac{\pi}{2} - u, \nu\right) \end{cases}$$

le funzioni theta di Jacobi, e con

$$(b) \qquad f(u,\nu) = \frac{\theta_1(u,\nu)}{\theta(u,\nu)}; \quad g(u,\nu) = \frac{\theta_2(u,\nu)}{\theta(u,\nu)}; \quad h(u,\nu) = \frac{\theta_3(u,\nu)}{\theta(u,\nu)}$$

le tre funzioni doppiamente periodiche che dalle stesse derivano, se i due moduli ν e ν' sono legati fra loro dall'equazione

$$(c) \qquad \nu\,.\,\nu' = \pi^2$$

allora, qualunque sieno gli argomenti u ed u', è noto sussistere la relazione

$$(d) \quad h^2(u',\nu')\,.\,f^2(u,\nu) + g^2(u',\nu')\,.\,g^2(u,\nu) + f^2(u',\nu')\,.\,h^2(u,\nu) = 1$$

e quindi si soddisfa all'equazione

$$i_x^4\,.\,w_x^2 + i_y^4\,.\,w_y^2 + i_z^4\,.\,w_z^2 = G^2$$

mediante il sistema di equazioni

$$
(e) \quad \begin{cases} i_x^2 \, . \, w_x = G \, . \, f\,(u', v') \, . \, h\,(u, v) \\ i_y^2 \, . \, w_y = G \, . \, h\,(u', v') \, . \, f\,(u, v) \\ i_z^2 \, . \, w_z = -G \, . \, g\,(u', v') \, . \, g\,(u, v) \end{cases}
$$

qualunque sieno le due variabili u ed u'.

Per soddisfare poi alla

$$
i_x^2 \, . \, w_x^2 + i_y^2 \, . \, w_y^2 + i_z^2 \, . \, w_z^2 = G^2 \, . \, \mu
$$

dove si è scritto μ in luogo di $\frac{h}{G}$, basterà disporre opportunamente di u', v', ossia delle $f\,(u',v')$, $g\,(u',v')$, $h\,(u',v')$, ritenendo sola variabile la u; per ciò sostituiti i predetti valori (e) in quest'ultima equazione, e ricordando essere

$$
(f) \; g^2(u,v) = g^2(o,v) - h^2(o,v).f^2(u,v)\,; \; h^2(u,v) = h^2(o,v) - g^2(o,v).f^2(u,v)
$$

si avrà

$$
\frac{1}{i_x^2} \cdot f^2(u',v').h^2(o,v) + \frac{1}{i_z^2} g^2(u',v').g^2(o,v) - \mu
$$

$$
-\left(\frac{1}{i_x^2} f^2(u',v').g^2(o,v) - \frac{1}{i_y^2} h^2(u',v') + \frac{1}{i_z^2} g^2(u',v').h^2(o,v) \right) f^2(u,v) = o
$$

la quale, dovendo essere soddisfatta qualunque sia il valore di u, si scompone nelle due

$$
(g) \begin{cases} i_z^2 . f^2(u',v').h^2(o,v) + i_x^2 . g^2(u',v').g^2(o,v) - i_x^2 . i_z^2 . \mu = o \\ i_y^2 . i_z^2 . f^2(u',v').g^2(o,v) - i_x^2 . i_z^2 . h^2(u',v') + i_x^2 . i_y^2 . g^2(u',v').h^2(o,v) = o. \end{cases}
$$

Ora è

$$
(h) \quad g(o,v') = \frac{1}{g(o,v)}\,; \quad h(o,v') = \frac{h(o,v)}{g(o,v)}\,; \quad h^4(o,v) - g^4(o,v) = 1
$$

e se nelle (f) mutiamo u e v in u' e v' e quindi ricaviamo i valori di $g(u',v')$; $h(u',v')$ si avrà facilmente

$$
(k) \quad \left\{ \begin{array}{l} g^2(u',v') = h^2(o,v)\, h^2(u',v') - g^2(o,v) \\ f^2(u',v') = h^2(o,v) - g^2(o,v) . h^2(u',v') \\ g^2(o,v)\, g^2(u',v') + h^2(o,v) . f^2(u',v') = 1 \end{array} \right.
$$

mediante le quali equazioni e le (g) avremo

$$
(l) \quad g^2(o,v) = \sqrt{\frac{(i_y^2 - i_z^2)(\mu i_x^2 - 1)}{(i_x^2 - i_z^2)(1 - \mu i_y^2)}}\,; \qquad h^2(o,v) = \sqrt{\frac{(i_x^2 - i_y^2)(1 - \mu i_z^2)}{(i_x^2 - i_z^2)(1 - \mu i_y^2)}}
$$

donde tosto per le (h)

$$
(m) \quad g^2(o,v') = \sqrt{\frac{(i_x^2 - i_z^2)(1 - \mu i_y^2)}{(i_y^2 - i_z^2)(\mu i_x^2 - 1)}}\,; \; h^2(o,v') = \sqrt{\frac{(i_x^2 - i_y^2)(1 - \mu i_z^2)}{(i_y^2 - i_z^2)(\mu i_x^2 - 1)}}
$$

e per le (g) e le (k)

$$
(u) \quad \left\{ \begin{array}{l} f^2(u',v') = i_x^2 \,.\, \sqrt{\dfrac{(1 - \mu i_y^2)(1 - \mu i_z^2)}{(i_x^2 - i_z^2)(i_x^2 - i_y^2)}}\,; \\[2ex] g^2(u',v') = i_z^2 \,.\, \sqrt{\dfrac{(\mu i_x^2 - 1)(1 - \mu i_y^2)}{(i_x^2 - i_z^2)(i_y^2 - i_z^2)}} \\[2ex] h^2(u',v') = i_y^2 \,.\, \sqrt{\dfrac{(1 - \mu i_z^2)(\mu i_x^2 - 1)}{(i_x^2 - i_y^2)(i_y^2 - i_z^2)}} \end{array} \right.
$$

dalle quali si avrà tosto il modulo k della corrispondente funzione elittica, essendo

$$
(p) \qquad k = \frac{1}{h^2(o,v)}
$$

e col suo mezzo si ricaverà tosto dalle tavole il valore del nomo q e quindi da questo ν mediante la relazione

$$(q) \qquad q = e^{-\nu},$$

non chè ν' ed u' dalle precedenti.

Se ora moltiplichiamo fra loro le due seconde delle equazioni (e) e differenziando la prima si sostituiscano i loro valori nella prima delle equazioni (91) si avrà facilmente

$$d\,u = \frac{G}{\theta_2^2(o,\nu)} \cdot \frac{i_y^2 - i_z^2}{i_y^2 \cdot i_z^2} \cdot \frac{g(u',\nu') \cdot h(u',\nu')}{f(u',\nu')} d\,t$$

ossia, pei valori (n)

$$d\,u = \frac{G}{\theta_2^2(o,\nu)} \cdot \frac{\sqrt{(i_y^2 - i_z^2)(\mu\, i_x^2 - 1)}}{i_x \cdot i_y \cdot i_z} \cdot d\,t$$

donde

$$(r) \qquad u = \frac{G}{\theta_2^2(o,\nu)} \cdot \frac{\sqrt{(i_y^2 - i_z^2)(\mu\, i_x^2 - 1)}}{i_x \cdot i_y \cdot i_z} (t - t_o),$$

dovendo essere $u = o$ per $t = t_o$.

Ottenuto u in funzione di t le (e) daranno pure in funzione di t le w_x, w_y, w_z.

Per avere finalmente le θ, φ, e Ψ, dalle (93) si ricava

$$(s) \qquad w_x \cdot \operatorname{sen}\varphi \cdot \operatorname{sen}\theta + w_y \cdot \cos\varphi \cdot \operatorname{sen}\theta = \operatorname{sen}^2\theta \cdot \left(\frac{d\Psi}{d\,t}\right)$$

e prendendo la OV diretta secondo il giratore G sarà

$$\operatorname{sen}\varphi \cdot \operatorname{sen}\theta = \cos\widehat{XG}\,; \quad \cos\varphi \cdot \operatorname{sen}\theta = \cos.\widehat{YG} \quad \cos\theta = \cos.\widehat{ZG}$$

ed essendo

$$G_x = G.\cos.\widehat{XG}\,; \qquad G_y = G.\cos\widehat{YG}\,; \qquad G_z = G.\cos\widehat{ZG}$$

sarà, per le (86),

$$(s)' \quad \text{sen}\,\varphi\,.\,\text{sen}\,\theta = \frac{i_x^2\,.\,w_x}{G}\,;\ \cos\varphi\,.\,\text{sen}\,\theta = \frac{i_y^2\,.\,w_y}{G}\,;\ \cos\theta = \frac{i_z^2\,w_z}{G}$$

e quindi, per la (s) e la

$$i_x^2\,.\,w_x^2 + i_y^2\,.\,w_y^2 + i_z^2\,.\,w_z^2 = G^2\,\mu\,,$$

si avrà

$$G^2\mu - i_z^2\,.\,w_z^2 = G\left\{1 - \frac{i_z^4}{G^2}\,.\,w_z^2\right\}.\frac{d\Psi}{dt}$$

dove ponendo per w_z il suo valore dato dalla terza delle (e), e ricordando essere

$$\theta_2^2(o,\nu) = \theta_3^2(o,\nu)\,.\,\frac{g^2(o,\nu)}{h^2(o,\nu)}$$

si troverà tosto

$$(t) \quad d\Psi = \frac{G}{i_z^2}.dt - \frac{\theta_3^2(o,\nu).i_x^2.i_y^2}{i_z^2}.\sqrt{\frac{1-\mu i_z^2}{i_x^2-i_y^2}}.\frac{du}{1-g^2(u',\nu').g^2(u,\nu)}$$

Ora, indicando con l il logaritmo e con l' la derivata logaritmica, è

$$\theta_3^2(o,\nu).f(a,\nu).g(a,\nu).h(a,\nu)\int\frac{du}{g^2(u,\nu)-g^2(a,\nu)}$$

$$= -u.l'.\theta(a,\nu) - \frac{1}{2}l.\frac{\theta_1(a-u,\nu)}{\theta_1(a+u,\nu)}$$

e quindi se facciamo

$$a = \frac{\nu}{\pi} u' \,.\, \sqrt{-1}$$

e ricordiamo essere

$$f\left(\frac{\nu}{\pi} u' \sqrt{-1}, \nu\right) = \frac{f(u',\nu')}{g(u',\nu')} \sqrt{-1}\;; \quad g\left(\frac{\nu}{\pi} u' \sqrt{-1}, \nu\right) = \frac{1}{g(u',\nu')}$$

$$h\left(\frac{\nu}{\pi} u' \sqrt{-1}, \nu\right) = \frac{h(u',\nu')}{g(u',\nu')}$$

si avrà

$$\theta_3^2(o,\nu) \,.\, \frac{f(u',\nu') \,.\, h(u',\nu')}{g(u',\nu')} \int \frac{du}{1 - g^2(u',\nu') g^2(u,\nu)}$$

$$= -\sqrt{-1} \,.\, u\, l' \theta \left(\frac{\nu}{\pi} u' \sqrt{-1}, \nu\right)$$

$$-\frac{1}{2} \sqrt{-1} \,.\, l \,.\, \frac{\theta_1\left(\frac{\nu}{\pi} u' \sqrt{-1} - u, \nu\right)}{\theta_1\left(\frac{\nu}{\pi} u' \sqrt{-1} + u, \nu\right)}$$

nella quale ponendo i valori (n) si ottiene tosto il secondo termine del secondo membro dell'equazione (t) integrato, e quindi sarà

$$(u) \quad \Psi = \Psi_0 + \frac{G}{i_z^2} t + \sqrt{-1} \,.\, u \,.\, l' \theta \left(\frac{\nu}{\pi} u' \sqrt{-1}, \nu\right)$$

$$+ \frac{1}{2} \sqrt{-1} \,.\, l \,.\, \frac{\theta_1\left(\frac{\nu}{\pi} u' \sqrt{-1} - u, \nu\right)}{\theta_1\left(\frac{\nu}{\pi} u' \sqrt{-1} + u, \nu\right)},$$

finalmente essendo

$$\cos\theta = \frac{i_z^2}{G} \cdot w_z\,; \qquad \text{tang.}\,\varphi = \frac{i_x^2}{i_y^2} \cdot \frac{w_x}{w_y}$$

si avrà

$$(v)\quad\begin{cases}\cos\theta = -\,i_z\cdot\sqrt[4]{\dfrac{(\mu i_x^2-1)(1-\mu i_y^2)}{(i_x^2-i_z^2)(i_y^2-i_z^2)}}\cdot g(u,\nu)\\[2ex] \text{tang}\,.\,\varphi = \dfrac{i_x}{i_y}\sqrt[4]{\dfrac{(i_y^2-i_z^2)(1-\mu i_y^2)}{(i_x^2-i_z^2)(\mu i_x^2-1)}}\cdot\dfrac{h(u,\nu)}{f(u,\nu)}\,.\end{cases}$$

Mediante le (e) e le $(s)'$ unitamente alle (f) e (k) sarà poi facile ottenere

$$\text{sen}\,\theta = h(o,\nu)\sqrt{\left(f^2(u',\nu')+g^2(u',\nu')\,.\,f^2(u,\nu)\right)}$$

$$\text{sen}\,\varphi = \frac{f(u',\nu')\,.\,h(u,\nu)}{h(o,\nu)\sqrt{\left(f^2(u',\nu')+g^2(u',\nu')f^2(u,\nu)\right)}}$$

$$\cos\varphi = \frac{h(u',\nu')\,.\,f(u,\nu)}{h(o,\nu)\sqrt{\left(f^2(u',\nu')+g^2(u',\nu')\,.\,f^2(u,\nu)\right)}}$$

e quindi, mediante le (k),

$$(z)\quad\begin{cases}\cos.\,\widehat{XG} = i_x\cdot\sqrt[4]{\dfrac{(1-\mu i_y^2)(1-\mu i_z^2)}{(i_x^2-i_z^2)(i_x^2-i_y^2)}}\cdot h(u,\nu)\\[2ex] \cos.\,\widehat{YG} = i_y\cdot\sqrt[4]{\dfrac{(\mu i_x^2-1)(1-\mu i_z^2)}{(i_x^2-i_y^2)(i_y^2-i_z^2)}}\cdot f(u,\nu)\\[2ex] \cos.\,\widehat{ZG} = -\,i_z\cdot\sqrt[4]{\dfrac{(\mu i_x^2-1)(1-\mu i_y^2)}{(i_x^2-i_z^2)(i_y^2-i_z^2)}}\cdot g(u,\nu)\,;\end{cases}$$

essendo poi

$$f(u+m\pi,\nu) = (-1)^m . f(u,\nu)\,; \qquad g(u+m\pi,\nu) = (-1)^m . g(u,\nu)\,;$$

$$h(u+m\pi,\nu) = h(u,\nu)$$

così dalle precedenti relazioni risulta

1. che l'angolo ψ può assumere col variare del tempo qualunque valore;

2. che $\cos.\widehat{XG}$ ritorna lo stesso in segno e grandezza per variare u di un numero qualunque di semi circonferenze; e che $\cos.\widehat{YG}$ e $\cos.\widehat{ZG}$ per le stesse variazioni di u riprendono il loro valore numerico ma mutano di segno, ritornando i medesimi al variare u di un numero pari di semi-circonferenze;

3. che $\cos.\widehat{GX}$ resta costantemente compreso fra i due valori

$$i_x \cdot \sqrt{\frac{1-\mu i_y^2}{i_x^2-i_y^2}} \quad \text{ed} \quad i_x \cdot \sqrt{\frac{1-\mu i_z^2}{i_x^2-i_z^2}}$$

non potendo $h\ (u,\nu)$ variare che fra i due limiti

$$h(o,\nu) \quad \text{ed} \quad h(o,\nu')=\frac{1}{h(o,\nu)}$$

4. che per la (r) il tempo di una tale oscillazione è

$$T=\pi \cdot \frac{\theta_2^2(o)}{G} \cdot \frac{i_x \cdot i_y \cdot i_z}{\sqrt{(i_x^2-i_y^2)(1-\mu i_z^2)}}$$

Articolo IV.

Del moto di rotazione di un corpo rotondo pesante intorno ad un punto del suo asse di figura.

160. Quando la forza sollecitante sia unicamente la gravità allora caschiamo nel caso contemplato al § 134, e quindi la proiezione verticale del giratore sarà costante durante tutto il movimento. Questo teorema ci porgerà un primo integrale delle equazioni generali del movimento: un secondo integrale ci verrà somministrato dal principio generale delle forze vive; e finalmente, nel caso di un corpo rotondo la velocità angolare del sistema intorno all'asse di figura dovendo essere costante, avremo da ciò il terzo integrale delle equazioni predette.

Sia r la distanza del baricentro dal punto fisso e si supponga che, deviato l'asse dalla verticale di angolo θ_o, siasi comunicata al corpo una quantità di moto tale da imprimergli una data velocità angolare w intorno a dato asse OP: essendochè l'asse di figura è un asse permanente rapporto al punto O, e che sono tutti permanenti gli assi condotti nel piano passante per O e perpendicolare all'asse di figura, così prenderemo quest'asse per asse delle z, e per asse delle x prenderemo la retta nella quale originariamente si intersecavano il piano predetto e il piano orizzontale che passa per O, prendendo poi l'asse delle y così che la rotazione intorno Z avvenga da X verso Y; di modo che sia sempre da riguardarsi come positiva la rotazione intorno al detto asse.

161. Decomposta la velocità angolare originariamente comunicata al sistema in tre secondo i tre assi, sieno esse rispettivamente w'_x ; w'_y ; w'_z ; per le fatte supposizioni sarà

$$i_x^2 = i_y^2 ; \quad \varphi_o = o ; \quad \Psi_o = o ; \quad w_z = w'_z = \text{costante}$$

$$\left(\Sigma \int F . df \right) = mgr \left(\cos\theta - \cos\theta_o \right)$$

mediante le quali relazioni le (95) e (97) diventano

$$(130) \left\{ \begin{aligned} & i_x^2 (w_x^2 + w_y^2) - i_x^2 (w'^2_x + w'^2_y) = 2gr (\cos\theta - \cos\theta_o) \\ & i_x^2 \{ (w_x . \operatorname{sen}\varphi + w_y . \cos\varphi) \operatorname{sen}\theta - w'_y . \operatorname{sen}\theta_o \} \\ & \qquad + i_z^2 . w'_z . (\cos\theta - \cos\theta_o) = o \end{aligned} \right.$$

nelle quali sostituendo i valori di w_x e di w_y dati dalle (93) si avrà

$$(131) \left\{ \begin{aligned} & \operatorname{sen}^2\theta \left(\frac{d\Psi}{dt} \right)^2 + \left(\frac{d\theta}{dt} \right)^2 = w'^2_x + w'^2_y - \frac{2gr}{i_x^2} \cos\theta_o + \frac{2gr}{i_x^2} . \cos\theta \\ & \operatorname{sen}^2\theta \left(\frac{d\Psi}{dt} \right) = w'_y . \operatorname{sen}\theta_o + \frac{i_z^2}{i_x^2} w'_z . \cos\theta_o - \frac{i_z^2}{i_x^2} w'_z . \cos\theta \end{aligned} \right.$$

Eliminando fra queste il $\frac{d\Psi}{dt}$ e ponendo per semplicità di scrittura

$$(132)\quad \begin{cases} \cos\theta = z\;;\quad \cos\theta_o = z_o\;;\quad \frac{2gr}{i_x^2} = a^2 \\ w'^2_x + w'^2_y - a^2 . z_0 = a^2 . b\;;\quad \frac{i_z^2}{i_x^2} w'_z = a^2 . c\;; \\ w'_y \sqrt{1 - z_0^2} + a^2 c . z_0 = a^2 . e \end{cases}$$

si avrà

$$(133)\quad dt = \pm \frac{dz}{a . \sqrt{\{(b+z)(1-z^2) - a^2(e-cz)^2\}}}$$

dove si prenderà il segno superiore o l'inferiore secondo che z cresce o diminuisce al crescere od al diminuire di t.

Analogamente dalla seconda delle (131), mediante lo spartimento delle frazioni, si avrà

$$(134)\quad d\Psi = \frac{a^2(e+c)}{2} \cdot \frac{dt}{1+z} + \frac{a^2(e-c)}{2} \cdot \frac{dt}{1-z}$$

e sostituendo i precedenti valori nella terza delle (93)

$$(135)\quad d\varphi = \left(w'_z + a^2 c\right) . dt - \frac{a^2(e+c)}{2} . \frac{dt}{1+z} + \frac{a^2(e-c)}{2} . \frac{dt}{1-z}$$

162. Ponendo

$$(136)\quad R = (b+z)(1-z^2) - a^2(e-cz)^2$$

si scorge tosto che R muta tre volte di segno pei valori di $z=1$; $z=z_o$; $z=-1$; $z=-\infty$, per cui indicando con m_1 la radice della $R=o$ compresa fra uno e z_o, con m_2 quella compresa fra z_o e l'unità negativa, e con $-m_3$ quella compresa tra -1 e $-\infty$ sarà

$$(137)\quad R = (m_1 - z)(z - m_2)(m_3 + z).$$

Le tre equazioni (133); (134); (135) si ridurranno quindi tosto alle trascendenti elittiche di prima e di terza specie ponendo

$$(138) \qquad z = m_2 + (m_1 - m_2) \cos^2 u$$

il cui modulo è

$$(139) \qquad k = \sqrt{\frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_3}}$$

Osserveremo di passaggio che ponendo $z = 1$ e $z = -1$ nelle (136) e (137) si ha

$$(140) \qquad \begin{cases} a(e - c) = \sqrt{(m_1 - 1)(m_2 - 1)(m_3 + 1)} \\ a(e + c) = \sqrt{(m_1 + 1)(m_2 + 1)(m_3 - 1)} \end{cases}$$

163. Dappoichè la velocità angolare intorno all'asse di figura è costante per avere la posizione assoluta del sistema ad un istante qualunque sarà sufficiente avere la posizione del suo asse di figura, bastando poi di girare intorno allo stesso il corpo di un angolo proporzionale al tempo corso dall'origine del moto all'istante che si considera. Ora la posizione dell'asse di figura è data ad ogni istante dai valori di θ e di Ψ; imperocchè l'angolo θ determina la posizione del detto asse rapporto alla verticale, e Ψ è eguale all'angolo che la sua proiezione orizzontale alla fine del tempo t forma colla stessa sua proiezione orizzontale all'origine del tempo, perchè il piano verticale condotto per l'asse di figura essendo perpendicolare al piano equatoriale del mobile la sua intersezione col piano orizzontale sarà perpendicolare all'intersezione dell'equatore col piano medesimo.

Se, dunque, fatto centro nel punto fisso O, con raggio *uno* si descrive una sfera basterà segnare la strada seguita dal punto di tragitto dell'asse del mobile per la sfera stessa per essere in caso di avere ad ogni istante la posizione assoluta del mobile; e la posizione di questo punto è ad ogni istante determinata dai due valori di z e di Ψ.

Per condurre il problema ad una completa soluzione useremo delle funzioni di Jacobi accennate nella nota dell' articolo precedente.

164. Essendo

$$(141)\qquad dt = \pm \frac{dz}{a\,.\,\sqrt{(m_1-z)(z-m_2)(m_3+z)}}$$

si scorge che z oscilla fra i due valori m_1 ed m_2, e supponendo quindi di contare il tempo dall' istante in cui raggiunge il suo massimo valore m_1, z diminuirà al crescer di t e nella precedente equazione dovremo prendere il segno inferiore. Ciò premesso poniamo

$$(142)\qquad m_1-z=p.f^2(x)\,;\quad z-m_2=p_1.g^2(x)\,;\quad m_3+z=p_2h^2(x)$$

essendo p p_1 e p_2 tre coefficienti da determinarsi.

Sommando la prima colla seconda e colla terza si ha

$$\frac{m_1-m_2}{p_1}=\frac{p}{p_1}\cdot f^2(x)+g^2(x)\,;\quad \frac{m_1+m_3}{p_2}=\frac{p}{p_2}\cdot f^2(x)+h^2(x)$$

e siccome è

$$(143)\qquad g^2(o)=h^2(o).f^2(x)+g^2(x);\quad h^2(o)=g^2(o).f^2(x)+h^2(o)$$

così potremo porre

$$(144)\qquad \frac{m_1-m_2}{p_1}=g^2(o);\ \frac{p}{p_1}=h^2(o)\,;\ \frac{m_1+m_3}{p_2}=h^2(o)\,;\ \frac{p}{p_2}=g^2(o)$$

dalle quali, ricordando essere

$$h^4(o)-g^4(o)=1\,,$$

si ha tosto

$$(145)\qquad p=\sqrt{(m_1-m_2)(m_1+m_3)}\,;\quad p_1=\sqrt{(m_1-m_2)(m_2+m_3)}\,;$$
$$p_2=\sqrt{(m_1+m_3)(m_2+m_3)}.$$

Se ora differenziamo una qualunque delle (142), e ricordiamo essere

$$f'(x)=\theta^2(o)g(x).h(x);\quad g'(x)=-\theta_3^2(o)f(x).h(x)\,;$$
$$h'(x)=-\theta_2^2(o).f(x).g(x),$$

e si eseguiscano le sostituzioni nella (141) avremo tosto

$$(146)\quad dt = \frac{2\,\theta^2(o)}{a.\sqrt{m_2+m_3}}.dx = \frac{2\theta_3^2(o)}{a\sqrt{m_1+m_3}}.dx = \frac{2.\theta_2^2(o)}{a\sqrt{m_1-m_2}}.dx$$

e integrando così che per $t=o$ riesca $z=m_1$, e quindi $f(x)=o$ e per ciò $x=o$, sarà

$$(147)\quad x = \frac{a.\sqrt{m_2+m_3}}{2\theta^2(o)}.t = \frac{a.\sqrt{m_1+m_3}}{2\theta_3^2(o)}t = \frac{a.\sqrt{m_1-m_2}}{2\theta_2^2(o)}.t$$

165. Essendo per le (142)

$$(148)\quad z=m_1-p.f^2(x)\,;\quad z=m_2+p_1.g^2(x)\,;\quad z=-m_3+p_2h^2(x)$$

ed essendo ancora

$$f(x+n\pi)=(-1)^n.f(x);\;\; g(x+n\pi)=(-1)^n.g(x);\;\; h(x+n\pi)=h(x)$$

si scorge che z riprende il medesimo valore ogni qual volta x aumenta di una mezza circonferenza, ossia ogni qual volta t aumenta della quantità

$$(149)\qquad T = \frac{2\theta^2(o).\pi}{a\sqrt{m_2+m_3}} = \frac{2.\theta_3^2(o).\pi}{a\sqrt{m_1+m_3}} = \frac{2.\theta_2^2(o).\pi}{a\sqrt{m_1-m_2}}$$

per cui, introdotto questo valore nelle superiori, avremo

$$(150)\qquad x = \frac{\pi}{T}.t$$

166. Per procedere al calcolo del valore di Ψ si determinino due quantità μ e λ tali che sia

$$\frac{g^2(\mu)}{h^2(\mu)} = \frac{p}{1+m_1}\,;\qquad f^2(\lambda) = -\frac{p}{1-m_1}$$

per cui dalle (143) avremo

$$(150)\quad \begin{cases} f^2(\mu) = -\dfrac{p_1}{p_2}.\dfrac{m_2-1}{1+m_2}; & g^2(\mu) = \dfrac{p_1}{1+m_2}; \quad h^2(\mu) = \dfrac{p_1}{p}.\dfrac{1+m_1}{1+m_2} \\ f^2(\lambda) = -\dfrac{p}{1-m_1}; & g^2(\lambda) = \dfrac{p}{p_2}.\dfrac{1+m_3}{1-m_1}; \quad h^2(\lambda) = \dfrac{p}{p_1}.\dfrac{1-m_2}{1-m_1} \end{cases}$$

dalle quali, per le (140), si ricava tosto

$$\frac{a(e+c)}{(1+m_1)\sqrt{m_2+m_3}}=-\sqrt{-1}\,.\frac{f(\mu).h(\mu)}{g(\mu)}.\frac{1}{h^2(\mu)}$$

$$\frac{a(e-c)}{(1-m_1)\sqrt{m_2+m_3}}=\sqrt{-1}\,.\frac{g(\lambda).h(\lambda)}{f(\lambda)}$$

Se ora nella (134) sostituiamo a dt il suo valore dato dalla prima delle (146) e così pure a z il suo valore dato pure della prima delle (148) avremo

$$d\Psi=\frac{a(e+c).\theta^2(o)}{(1+m_1)\sqrt{m_2+m_3}}\cdot\frac{dx}{1-\frac{p}{1+m_1}f^2(x)}$$

$$+\frac{a(e-c).\theta^2(o)}{(1-m_1)\sqrt{m_2+m_3}}\cdot\frac{dx}{1+\frac{p}{1-m_1}.f^2(x)}$$

la quale, mediante le relazioni precedenti, diventa

$$d\Psi=\sqrt{-1}.\frac{\theta^2(o).f(\mu).h(\mu)}{g(\mu)}\cdot\frac{dx}{g^2(\mu).f^2(x)-h^2(\mu)}$$

$$+\sqrt{-1}.\frac{\theta^2(o).g(\lambda).h(\lambda)}{f(\lambda)}\cdot\frac{dx}{1-f^2(\lambda).f^2(x)}\cdot$$

donde, per le note formole d'integrazione,

$$(151)\qquad \Psi=\sqrt{-1}\,.\,x\,(l'\,.\,\theta_1\,(\lambda)+l'\,.\,\theta_2(\mu))$$

$$+\frac{1}{2}\sqrt{-1}.\left\{.\,l\,.\frac{\theta\,(\lambda-x)}{\theta\,(\lambda+x)}+l\,.\frac{\theta_3\,(\mu-x)}{\theta_3\,(\mu+x)}\right\}$$

Dalle (150) si scorge facilmente che tanto λ quanto μ sono quantità immaginarie, e quindi nel susseguente sviluppo del calcolo porremo

$$\lambda=\alpha\,.\,i\,;\qquad\qquad \mu=\beta i$$

rappresentando con i il $\sqrt{-1}$.

167. Quando siensi trovate le tre radici m_1; m_2; m_3 della $R=o$, e quindi il modulo k della corrispondente funzione elittica (139), si calcolerà il nomo q dalle relazioni date a quest'uopo, e quindi ponendo nelle (148) in luogo di x il suo valore (150) sarà

$$z = m_1 - \sqrt{(m_1 - m_2)(m_1 + m_3)} . f^2\left(\frac{\pi}{T} . t\right)$$

ed anche

$$z = m_2 + \sqrt{(m_1 - m_2)(m_2 + m_3)} . g^2\left(\frac{\pi}{T} . t\right)$$

Ora essendo

$$f(n\pi) = o ; \qquad g\left(\frac{n\pi}{2}\right) = o$$

così si scorge che Z riprende alternativamente il suo valore massimo e minimo ai tempi

$$t = o ; \quad \tfrac{1}{2} T ; \quad \tfrac{2}{2} T ; \quad \tfrac{3}{2} T ; \quad \text{ecc.}$$

con costante periodo.

168. Per quanto spetta al calcolo del valore di Ψ, essendo (150)

$$h^2(\lambda) = \frac{1 - m_2}{1 - m_1} \cdot \sqrt{\frac{m_1 + m_3}{m_2 + m_3}} ; \qquad h^2(\mu) = \frac{1 + m_1}{1 + m_2} \cdot \sqrt{\frac{m_2 + m_3}{m_1 + m_3}}$$

ed m_1 ed m_2 numericamente minori di *uno*, ed m_3 maggiore di *uno* così tanto $h(\lambda)$ quanto $h(\mu)$ saranno costantemente maggiori di *uno;* e quindi ponendo

$$(152) \qquad tg . \gamma = \frac{1}{h(\lambda)} ; \qquad tg . \gamma' = \frac{1}{h(\mu)}$$

γ e γ' saranno minori di $\tfrac{1}{4}\pi$, e si avranno i valori di λ e μ con identico calcolo nel modo seguente.

Ponendo per (λ) il suo valore $\alpha\, i$ avremo

$$tg\,(\tfrac{1}{4}\pi - \gamma) = \frac{1 - tg.\,\gamma}{1 + tg.\,\gamma} = \frac{\theta_3(\alpha\, i) - \theta(\alpha\, i)}{\theta_3(\alpha\, i) + \theta(\alpha\, i)}$$

ossia

$$tg\left\{\frac{1}{4}\pi - \gamma\right\} = \frac{2\,q\left\{\cos 2\,\alpha\, i + q^{8}.\cos.6\,\alpha\, i + q^{24}.\cos.10\,\alpha\, i + \text{ecc.}\right\}}{1 + 2\,q^{4}.\cos 4\,\alpha\, i + 2\,q^{6}.\cos 8.\alpha\, i + \text{ecc.}}$$

Ora poniamo

$$(153) \qquad y = e^{2\,\alpha} + e^{-2\,\alpha} = 2.\cos.2\,\alpha\, i$$

ed avremo assai facilmente

$$2.\cos\alpha i = \sqrt{y+2}\,; \quad 2.\cos 2\alpha i = y\,; \quad 2.\cos.3\alpha i = (y-1)\sqrt{y+2}$$

$$\cos 4\alpha i = y^2 - 2;\ 2.\cos.5\alpha i = (y^2 - y - 1)\sqrt{y+2};\ 2\cos.6\alpha i = y^3 - 3y$$

ecc.

$$2.\text{sen}\,\alpha i = i.\sqrt{y-2};\ 2.\text{sen}.2\alpha i = i.\sqrt{y^2-4};\ 2.\text{sen}3\alpha i = i(y+1)\sqrt{y-2}$$

$$2.\text{sen}\,4\alpha i = i.y\sqrt{y^2-4}\,; \quad 2.\text{sen}.5\alpha i = i\{y^2 + y - 1\}\sqrt{y-2};$$

$$2\,\text{sen}\,6\,\alpha\, i = i(y^2 - 1)\sqrt{y^2-4}$$

ecc.

donde

$$tg(\tfrac{1}{4}\pi - \gamma) = \frac{q.y(1 - 3\,q^8 + q^8.\,y^2 - \text{ecc.})}{1 - 2\,q^4. + q^4.\,y^2 - \text{ecc.}}$$

ed

$$(154) \qquad y = \frac{1}{q}.\,tg\,(\tfrac{1}{4}\pi - \gamma)\,\frac{1 - 2\,q^4 + q^4.\,y^2 - \text{ecc.}}{1 - 3\,q^8 + q^8.\,y^2 - \text{ecc.}}$$

dalla quale si potrà avere il valore di y mediante le approssimazioni successive. Egualmente si calcolerà y' mutando γ in γ' ed α in β.

169. Ottenuti così y ed y' si avrà

$$l'.\theta_1(\alpha i) = \frac{\theta'_1(\alpha i)}{\theta_1(\alpha i)} = \frac{\cos.\alpha i - 3q^2.\cos.3\alpha i + 5q^6.\cos 5\alpha i - \text{ecc.}}{\text{sen}\ \alpha i - q^2.\cos 3\alpha i + q^6.\cos 5\alpha i - \text{ecc.}}$$

la quale per le relazioni precedenti diventa

$$l'.\theta_1(\alpha i) = \frac{1}{i} \cdot \sqrt{\frac{y+2}{y-2}} \cdot \frac{1 - 3q^2(y-1) + 5q^6(y^2 - y - 1) - \text{ecc.}}{1 - q^2(y+1) + q^6(y^2 + y - 1) - \text{ecc.}}$$

ossia, esprimendo con $L\ (y)$ la parte reale del secondo membro

(155) $$l'.\theta_1(\alpha i) = \frac{1}{i} \cdot L\ (y)$$

Egualmente essendo

$$l'\theta_2(\beta i) = -\frac{\text{sen}.\beta i + 3\,q^2.\text{sen}.3\beta i + 5q^6.\text{sen}.5\beta i + \text{ecc.}}{\cos \beta i + q^2.\cos 3\beta i + q^6.\cos 5\beta i + \text{ecc.}}$$

sarà

$$l'.\theta_2(\beta i) = -i. \sqrt{\frac{y'-2}{y'+2}} \cdot \frac{1 + 3q^2(y'+1) + 5q^6(y'^2 + y' - 1) + \text{ecc.}}{1 + q^2(y'-1) + q^6(y'^2 - y' - 1) + \text{ecc.}}$$

ossia

(155)'. $$l'.\theta_2(\beta i) = \frac{1}{i}\ L\ (-y').$$

Mediante i precedenti valori la prima parte di Ψ risulta

$$x\left(L\ (y) + L\ (-y')\right)$$

ossia, ponendo

(156) $$L\ (y) + L\ (-y') = A,$$

essendo A una costante,

$$A\ .\ x.$$

170. In quanto alla seconda parte, se poniamo

$$\frac{2N(\alpha i,\, x)}{i} \quad e \quad = \frac{\theta(\alpha i - x)}{\theta(\alpha i + x)} \qquad (157)$$

dalle note relazioni fra le quantità esponenziali e le trigonometriche ricaveremo facilmente

$$\text{tang.}\, N(\alpha i, x) = \frac{1}{i} \cdot \frac{\theta(\alpha i + x) - \theta\,(\alpha i - x)}{\theta(\alpha i + x) + \theta\,(\alpha i - x)}$$

ossia, mediante le precedenti relazioni, mutando αi in y;

(158)

$$\text{tang.}\, N(y,x) = \frac{q.\sqrt{y^4 - 4}.(\text{sen}\, 2x - q^2.y.\text{sen}\, 4x + q^8(y^2 - 1)\text{sen}\, 6x - \text{ecc.})}{1 - q.y.\cos 2x + q^4(y^2 - 2)\cos 4x - q^0(y^3 - 3y)\cos 6x + \text{ecc}}.$$

Un identico calcolo per quanto si riporta a μ somministrerà il secondo termine espresso da $N(-y', x)$, ricavando il valore di *tg.* $N(-y', x)$, mutando nella precedente la y in $-y'$.

Detta quindi $F(x)$ la seconda parte del valore di Ψ sarà

$$F(x) = N(y, x) + N(-y'\, x) \qquad (159)$$

e quindi, ponendo per x il suo valore espresso per t,

$$\Psi = A\, . \frac{\pi}{T} \cdot t + F . \left(\frac{\pi}{T} \cdot t\right). \qquad (160)$$

171. Delle due parti di cui si compone il valore di Ψ la prima cresce proporzionalmente al tempo e la seconda è una funzione periodica la quale si annulla pei valori di

$$t = o\,; \quad \frac{1}{2}\, T\,; \quad \frac{2}{2}\, T\,; \quad \frac{3}{2}\, T\,; \text{ ecc.}$$

pei quali la z diventa alternativamente massima e minima, ed

è positiva fino a che t cresce da o a $\frac{1}{2}$ T; e diventa negativa da $\frac{1}{2}$ T a T, ripetendo le stesse oscillazioni al passare di t pei medesimi intervalli successivi.

Se quindi si consideri il meridiano in cui si trova l'asse di figura del corpo quando il suo punto di tragitto per la sfera suddetta è il più basso, e si immagini un secondo meridiano il quale ruoti di moto uniforme intorno alla verticale con velocità angolare $A.\frac{\pi}{T}$, i detti due meridiani si sovrapporranno dopo eguali intervalli di tempo $\frac{1}{2}$ T, mentre il primo avvanzerà sul secondo nel primo intervallo e resterà indietro nel secondo, e così via; in questo intervallo poi il punto di tragitto dell'asse di figura del corpo per la sfera passa dalla sua posizione la più depressa alla più elevata, e inversamente. Egli è per sè chiaro che i punti i più alti e i più bassi della curva descritta sulla sfera dai detti punti di tragitto stanno sopra due paralleli orizzontali, fra i quali è sempre compresa la detta trajettoria. Nell'unita figura si è cercato di rappresentare la proiezione orizzontale di questa trajettoria nel caso in cui sia

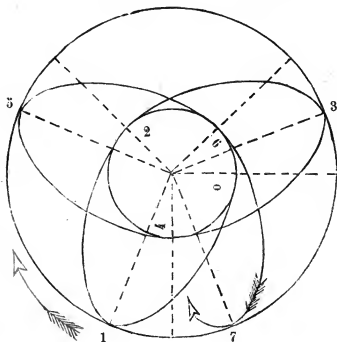
$$A.\tfrac{1}{2}\pi > \tfrac{1}{2}\pi\,;$$

i numeri 0, 1, 2, 3 ecc. rappresentano le proiezioni dei punti i più bassi e i più elevati pei quali passa nel suo moto il punto di tragitto negli istanti

$$o;\ \tfrac{1}{2}\ T;\ \tfrac{2}{2}\ T;\ \tfrac{3}{2}\ T \text{ ecc.};$$

esso principia il suo moto in o, ascende in 1 quindi ridiscende in 2, di qui torna ad elevarsi in 3 per ridiscendere in 4 alla medesima altezza di o, compiendo allora una prima oscillazione in un tempo eguale a $2\,T$. Riprende quindi una seconda oscillazione partendo da 4 passando per 5, 6, 7 e compiendola quando è giunto in 8 e così via. In questo caso il punto di partenza d'ogni oscillazione avvanza dalla sinistra anteriormente alla diritta con moto diretto. La direzione di questo moto, come la forma della curva, dipende dal valore dell'angolo $A\,\frac{1}{2}\,\pi$, e la curva prende

una forma inviluppata quando il pendolo oscilla fra due cerchi minori, di cui l'uno giaccia nell'emisfero inferiore l'altro nel su-

periore; ma per più ampli sviluppi io rimetto il lettore all'opera del Schellbach « die Lehre von den elliptischen integralen und den theta-functionen, Berlino 1864. »

CAPO VII.

Del moto di un sistema interamente libero

Articolo I.

Principii fondamentali.

172. Nel capo primo abbiamo veduto che il moto di un sistema rigido qualunque può, ad ogni singolo istante, essere sempre ridotto ad un moto progressivo, eguale al moto posseduto da uno qualunque de' suoi punti, e ad una rotazione intorno al punto medesimo. Una tale decomposizione del moto vero del sistema in due è in gran parte arbitraria, dipendendo dalla scelta di quel punto particolare intorno al quale si considera aver luogo la rotazione, e si fa unicamente allo scopo di poter più facilmente assegnare ad ogni istante la vera posizione assoluta del corpo.

Finchè non si abbia altro di mira che di rappresentare il movimento del corpo e nulla più si può scegliere qualunque punto del sistema come centro di rotazione, ma volendo calcolare il movimento reale del sistema mette conto di scegliere il baricentro, potendosi allora determinare i due movimenti separatamente, ed anche indipendentemente nel primissimo istante, e durante pure il movimento quando le forze sollecitanti il sistema sieno indipendenti dalla posizione assoluta dei punti nello spazio.

173. Ciascun elemento materiale del sistema trovasi sollecitato al moto da forze esterne al sistema alle quali non può inramente ubbidire, stretto com'è dai legami cogli altri elementi costituenti il sistema a non poter prendere qualunque movimento, ma solo quello che si accorda col movimento degli altri. Oltre l'azione quindi delle forze esterne esso prova eziandio una reazione proveniente dai legami che lo congiungono agli altri ele-

menti del sistema, la quale concorre insieme colle prime a fargli prendere quel movimento che esso ha realmente. Se dunque si consideri il detto elemento come sollecitato dalle forze esterne operanti sul sistema e dalle reazioni che esso soffre dagli altri elementi del sistema stesso, esso si muoverà come effettivamente si muove, e ciò anche se fosse assolutamente solo ed isolato dal sistema.

Ciò premesso riferiamo il sistema a tre assi ortogonali fissi e sieno x, y, z le coordinate dell' elemento generico Δm alla fine del tempo t, sieno inoltre X; Y; Z le componenti delle forze acceleratrici esterne sollecitanti l'elemento stesso, ed R_x; R_y; R_z le componenti delle reazioni prodotte dai legami del sistema; per ciò che abbiam detto sarà

$$\frac{d^2x}{dt^2} \cdot \Delta m = X . \Delta m + R_x \Delta m \; ; \quad \frac{d^2y}{dt^2} \cdot \Delta m = Y . \Delta m + R_y . \Delta m$$

$$\frac{d^2z}{dt^2} \cdot \Delta m = Z . \Delta m + R_z . \Delta m$$

e analoghe equazioni si avranno per tutti gli elementi costituenti il sistema, le quali dovendo tutte sussistere indipendentemente le une dalle altre sussisterà pure la loro somma e si avrà

$$\Sigma \cdot \frac{d^2x}{dt^2} \Delta m = \Sigma . X \Delta m + \Sigma R_x \Delta m \; ; \quad \Sigma \cdot \frac{d^2y}{dt^2} \Delta m = \Sigma Y . \Delta m + \Sigma R_y . \Delta m \; ;$$

$$\Sigma \frac{d^2z}{dt^2} \Delta m = \Sigma Z . \Delta m + \Sigma R_z . \Delta m$$

estendendo le somme a tutti gli elementi materiali che costituiscono il sistema proposto.

Ora, per poco che si consideri, si scorgerà facilmente che le reazioni che i varii elementi materiali esercitano gli uni sopra degli altri, col mutare il moto che ciascuno naturalmente prenderebbe se libero, non altro fanno che tendere a spostare i detti elementi ed a mutare le posizioni loro relative, al che

si oppongono i legami del sistema, per virtù dei quali l'azione loro resta distrutta. Risulta dunque che l'azione totale delle dette reazioni è certamente nulla, essendo per condizione immutabile la forma del sistema; sarà quindi

$$\Sigma R_x . \Delta m = o ; \quad \Sigma R_y . \Delta m = o ; \quad \Sigma R_z . \Delta m = o .$$

Di più se diciamo x_o; y_o; z_o; le coordinate del baricentro è

$$m x_o = \Sigma x \Delta m ; \quad m y_o = \Sigma y \Delta m ; \quad m z_o = \Sigma z \Delta m$$

in virtù delle quali le superiori diventano

$$(161) \quad m \cdot \frac{d^2 x_o}{dt^2} = \Sigma X . \Delta m ; \quad m \cdot \frac{d^2 y_o}{dt^2} = \Sigma Y . \Delta m ; \quad m \frac{d^2 z_o}{dt^2} = \Sigma Z . \Delta m$$

cioè « il baricentro del sistema si muove come se tutta la massa fosse concentrata in questo punto e tutte le forze motrici esterne sollecitanti il sistema si fossero trasportate parallelamente a sè stesse e applicate al punto medesimo. »

174. Risulta dunque che per assegnare il movimento del baricentro basterà considerare concentrata in esso tutta la massa del corpo e applicare al punto medesimo tutte le forze motrici esterne che sollecitano il sistema, e quindi procedere come nel calcolo del movimento di un punto. Per quanto poi spetta al movimento di rotazione intorno al baricentro esso, ad ogni singolo istante, succederà come se il baricentro stesso fosse fisso ed il sistema fosse animato dalle stesse forze che effettivamente lo sollecitano al moto. Infatti supponendo scomposto il moto del corpo in una traslazione eguale al moto del baricentro ed in una rotazione intorno al baricentro, potremo applicare al baricentro una forza capace di estinguere la traslazione, la quale, passando pel baricentro, non reca alcuna alterazione al moto rotatorio intorno a quel punto, essendosi al Capo III dimostrato che una forza passante pel baricentro non è capace che di produrre una traslazione e nulla più; quindi coll'impiego di una tal forza si arresterà il moto progressivo ma non si altererà menomamente la rotazione intorno al baricentro, la quale in ogni singolo istante

si conserva dunque la stessa come se durante l'istante medesimo il baricentro fosse assolutamente fisso nello spazio.

Ciò non vuol dire per altro che i due movimenti sieno sempre indipendenti l'uno dall'altro; ciò non ha luogo evidentemente se non quando le forze sollecitanti sieno indipendenti dalla posizione assoluta dei punti nello spazio, come ad esempio se il corpo sia sollecitato unicamente dalla gravità; ciò ha pur luogo nel primissimo istante, e si farà profitto di questa circostanza per determinare il movimento iniziale, e quindi le costanti delle integrazioni.

175. Per assegnare il movimento del sistema si riferirà il sistema a tre assi fissi nello spazio rapporto ai quali si calcolerà il movimento del baricentro mediante le (**161**); e si concepirà un secondo sistema di assi paralleli ai primi e coll'origine nel baricentro i quali si trasportino collo stesso parallelamente a sè stessi, ed a questi si riferirà il moto di rotazione del sistema intorno al baricentro. Quest' ultimo sistema potrà essere sostituito dal sistema di coordinate del § **132**, e allora il moto di rotazione intorno al baricentro si avrà dal sistema delle equazioni (**91**) e (**93**), le quali ci servirono ad assegnare il moto di rotazione intorno ad un punto. Se queste tre ultime equazioni sono indipendenti dalle (**161**) allora si procederà separatamente all' integrazione dei due sistemi; altrimenti converrà trattare i due sistemi congiuntamente; questo secondo caso si presenterà tutte le volte che le forze sollecitanti dipendono dalla posizione assoluta del sistema nello spazio, nel qual caso i due movimenti non sono fra loro indipendenti.

176. In ogni caso un primo integrale del precedente sistema di equazioni si avrà dall'applicazione del principio generale delle forze vive, di cui credo non inopportuno porgere qui una dimostrazione pel caso attuale.

Per valutare il lavoro di una forza è indifferente o progettare lo spazio percorso dal suo punto di applicazione sulla direzione della forza e moltiplicare la forza per la proiezione predetta, oppure progettare la forza sulla direzione del suo punto di applicazione e moltiplicare la proiezione della forza pel viaggio del suo punto di applicazione; se quindi consideriamo l'elemento generico del sistema di coordinate x, y, z e di massa Δm,.

le componenti delle forze motrici che sollecitano l'elemento stesso essendo rispettivamente

$$\frac{d^2x}{dt^2}\,\Delta m\,; \qquad \frac{d^2y}{dt^2}\,\Delta m\,; \qquad \frac{d^2z}{dt^2}\,\Delta m$$

e gli spazii percorsi dall'elemento secondo i tre assi essendo

$$dx\,; \qquad dy\,; \qquad dz$$

il lavoro sviluppato nel tempo dt dalle forze motrici che sollecitano l'elemento stesso sarà

$$\left(\frac{d^2x}{dt^2}\cdot dx+\frac{d^2y}{dt^2}\cdot dy+\frac{d^2z}{dt^2}\cdot dz\right).\Delta m$$

e quindi il lavoro sviluppato nel detto tempo dalle forze motrici operanti sopra il sistema sarà

$$\text{(162)} \qquad \Sigma\left(\frac{d^2x}{dt^2}\cdot dx+\frac{d^2y}{dt^2}\cdot dy+\frac{d^2z}{dt^2}\cdot dz\right).\Delta m$$

estendendo la somma a tutti gli elementi materiali costituenti il sistema. D'altra parte le forze interne inerenti al sistema, per l'invariabilità della forma, non compiono lavoro di sorta, e se diciamo F la forza motrice esterna operante sull'elemento generico, e df lo spazio percorso dall'elemento stesso nel tempo dt valutato secondo la direzione della forza F, ossia la proiezione dello spazio percorso dall'elemento generico sulla direzione della forza F, il lavoro sviluppato dalla stessa durante il tempo suddetto sarà

$$F.\,df$$

e quindi il lavoro totale sviluppato dalle forze sollecitanti il sistema sarà

$$\text{(163)} \qquad \Sigma\, F.\,df$$

estendendo la somma a tutte le forze operanti. Siccome le (148)

e (149) non sono che differenti espressioni di una medesima quantità, così sarà

$$\Sigma\left\{\frac{d^2x}{dt^2}\,.\,dx+\frac{d^2y}{dt^2}\,.\,dy+\frac{d^2z}{dt^2}\,.\,dz\right\}.\,\Delta m=\Sigma\,.\,F.df$$

ed integrando, ed estendendo l'integrale fra due posizioni successive del sistema, α ed α', sarà

$$(164)\qquad \tfrac{1}{2}\left\{\left(\Sigma\, v^2\,\Delta\, m\right)_{\alpha'}-\Sigma\left(v^2\,\Delta\, m\right)_{\alpha}\right\}=\left\{\Sigma\int F\,d\,f\right\}_{\alpha}^{\alpha'}$$

la quale ci dice che « nel passaggio del sistema da una sua posizione ad una posizione successiva la differenza delle semiforze vive del sistema eguaglia il lavoro sviluppato dalle forze motrici esterne operanti sullo stesso nel passaggio della sua prima posizione all'ultima ».

177. Supponiamo ora decomposto il movimento dell'elemento generico Δm in due, l'uno parallelo ed eguale a quello di cui è dotato il baricentro, e l'altro corrispondente ad una rotazione w intorno ad asse passante pel baricentro, convenientemente scelto così che i due movimenti rappresentino il movimento reale dell'elemento che si considera. Sieno x_o; y_o; z_o le coordinate del baricentro alla fine del tempo t, ed a, b, c i coseni degli angoli che l'asse intorno a cui avviene le rotazione fa coi tre assi, e sieno x'; y'; z' le coordinate dell' elemento Δm rapporto ai tre assi condotti pel baricentro parallelamente agli assi dati.

Essendo la rotazione w intorno l' asse dato corrispondente a tre rotazioni $a.w$; $b.w$; $c.w$ intorno ai tre assi X'; Y'; Z', ed in virtù di queste rotazioni avvanzando il detto elemento secondo i tre assi nel tempo dt relativamente delle quantità

$$(b.z'-c.y')w\,dt\,;\qquad (c.x'-a\,z')w\,dt;\qquad (ay'-b\,x')w.dt$$

così la velocità assoluta dell' elemento stesso secondo i tre assi sarà la risultante delle tre

$$\frac{dx_o}{dt}+(b.z'-c.y')w\,;\ \frac{dy_o}{dt}+(c.x'-a\,z')w\,;\ \frac{dz_o}{dt}+(a.y'-bx').w\,;$$

e quindi, detta v la velocità assoluta dell'elemento, sarà

$$v^2=\left(\frac{dx_o}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy_o}{dt}\right)^2+\left(\frac{dz_o}{dt}\right)^2+2\Big(\Big(b.\frac{dx_o}{dt}-a.\frac{dy_o}{dt}\Big)z'$$

$$+\Big(a.\frac{dz_o}{dt}-c.\frac{dx_o}{dt}\Big)y'+\Big(c.\frac{dy_o}{dt}-b.\frac{dz_o}{dt}\Big)x'\Big).w+\Big(a^2(y'^2+z'^2)$$

$$+b^2(x'^2+z'^2)+c^2(x'^2+y'^2)-2abx'y'-2ac.x'z'-2bc.y'z'\Big)w^2$$

Se quindi consideriamo le analoghe espressioni corrispondenti a tutti gli elementi materiali costituenti il sistema e, dopo moltiplicata ciascuna per la massa dell' elemento corrispondente, le sommiamo, avremo

$$\Sigma v^2\,\Delta m=\left(\left(\frac{dx_o}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy_o}{dt}\right)^2+\left(\frac{dz_o}{dt}\right)^2\right)m$$

$$+m\Big(a^2.i^2_{x'}+b^2.i^2_{y'}+c^2.i^2_{z'}-2ab.i\lambda_{x'y'}-2ac.i\lambda_{x'z'}-2bc.i\lambda_{y'z'}\Big)w^2$$

ma, detta V la velocità assoluta del baricentro, ed mi_o^2 il momento d'inerzia del sistema rapporto all'asse intorno cui avviene la rotazione, è

$$(165)\quad\left\{\begin{array}{l} V^2=\left(\frac{dx_o}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy_o}{dt}\right)^2+\left(\frac{dz_o}{dt}\right)^2 \\ m\,i_o^2=m.\left(a^2.\,i^2_{x'}+b^2.\,i^2_{y'}+c^2.\,i^2_{z'}\right. \\ \left.-2\,a\,b\,.\,i\lambda_{x'y'}-2\,a\,c\,.\,i\lambda_{x'z'}-2\,b\,c\,.\,i\lambda_{y'z'}\right) \end{array}\right.$$

dunque sarà

$$(166)\qquad \Sigma\, v^2.\,\Delta\, m=m\,.\,V^2+m\,i_o^2.w^2$$

donde risulta che « l'assoluta forza viva del sistema eguaglia la forza viva relativa intorno al baricentro aumentata dell'assoluta forza viva del baricentro stesso ».

In seguito a ciò la (164) si può scrivere così

$$(167)\quad \tfrac{1}{2}\,m\left(V^2_{\alpha'}-V^2_{\alpha}+i_o^2\,.\,w^2_{\alpha'}-i_o^2\,.\,w^2_{\alpha}\right)=\left(\Sigma\!\int F.df\right)_{\alpha}^{\alpha'}$$

la quale rappresenta in ogni caso un primo integrale delle equazioni generali del movimento.

178. Se il corpo che si considera è pesante, siccome i pesi dei vari elementi materiali che lo costituiscono si riducono ad una forza unica applicata al baricentro così essi non avranno alcuna influenza sul moto di rotazione intorno a questo punto, il quale succederà precisamente come se la gravità non esistesse, e non si avrà riguardo se non alle altre forze le quali per avventura sollecitassero il sistema.

Se il corpo invece di essere interamente libero fosse obbligato a poggiare costantemente sopra una data superficie allora o esso premerà sulla superficie o no; in questo secondo caso egli è come se la superficie non esistesse e il corpo fosse interamente libero; nel primo basterà aggiungere alle forze date che sollecitano il corpo una forza eguale e direttamente contraria alla pressione che esso esercita sulla superficie, e supporlo poi del tutto libero. La direzione della detta forza e il suo punto di applicazione dipendono poi e dalla natura della superficie sulla quale poggia il corpo e dalla natura della superficie conterminante il corpo dato; scrivendo in linguaggio algebrico le condizioni geometriche relative si avranno in ogni caso tante equazioni quante appunto si richieggono per la completa determinazione di tutte le incognite che entrano nel problema proposto.

Siccome un esempio del moto di un corpo interamente libero ci si presenterebbe o troppo semplice per meritare attenzione o troppo complicato per essere compreso nei limiti del presente libro, così mi limiterò a considerare il caso di un corpo pesante che poggia sopra di un piano, e ciò tanto più che in questo esempio appunto i due moti del baricentro e di rotazione intorno al baricentro non sono indipendenti fra loro.

Articolo II.

Del moto di un corpo rotondo pesante appoggiato ad un piano.

179. Prenderemo per asse delle X la linea di massima pendenza del piano che passa per la proiezione del baricentro sul piano all'origine del moto, contando le x dall'alto al basso, e prenderemo l'asse Z normale al piano e diretto dal basso al-

l' alto, fissando l'origine nella suddetta proiezione del baricentro; diremo i l'angolo d'inclinazione del piano all'orizzonte, x_1; y_1; z_1 le coordinate del baricentro alla fine del tempo t ed N la pressione esercitata dal corpo sul piano presa in senso contrario.

Il moto del baricentro sarà determinato dalle

$$(168) \qquad \frac{d^2x_1}{dt^2}=g\,\text{sen}\,i\,; \quad \frac{d^2y_1}{dt^2}=o\,; \quad \frac{d^2z_1}{dt^2}=\frac{N}{m}-g\,.\cos i$$

Per quanto spetta al moto rotatorio osserveremo che la resistenza opposta dal piano, essendo costantemente normale al piano, trasportata al baricentro non può originare che un giratore parallelo al piano, e siccome la gravità si può supporre concentrata nel baricentro, così il componente del giratore attuale perpendicolare al piano sarà costante durante tutto il movimento; supponendo quindi il corpo rotondo intorno l'asse Z, e prendendo per piano di riferimento il piano parallelo a quello sul quale poggia il corpo, sarà

$$(169) \quad i_z^2.w_z\,.\cos\theta+i_x^2\,.\,\text{sen}\,\theta\,.\left(w_x\,.\,\text{sen}\,\varphi+w_y\,.\cos\varphi\right)=\text{cost.};$$

e pel teorema delle forze vive

$$(169)' \qquad \left(i_x^2\,(w_x^2+w_y^2)+i_z^2\,.\,w_z^2\right)_t-\left(i_x^2\,(w_x^2+w_y^2)+i_z^2\,w_z^2\right)_o$$

$$+\left(\left(\frac{dx_1}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy_1}{dt}\right)^2+\left(\frac{dz_1}{dt}\right)^2\right)_t-\left(\left(\frac{dx_1}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy_1}{dt}\right)^2+\left(\frac{dz_1}{dt}\right)^2\right)_o$$

$$=2g.\cos i\left((z_1)_o-z_1\right)+2g\,\text{sen}\,i\,.x_1\,.$$

Finalmente, essendo il corpo di rivoluzione, la normale alla superficie conterminante il corpo stesso nel punto in cui tocca il piano, quindi la N, passerà costantemente per l'asse di figura; la resistenza dunque opposta dal piano non potrà alterare la rotazione del corpo intorno all'asse medesimo, rotazione che non può essere alterata nè dalla gravità, perchè passante

pure per l'asse, nè dall'inerzia per l'eguaglianza dei due momenti; detta per ciò n la velocità di rotazione originariamente impressa intorno all'asse di figura, sarà

$$w_z = n \tag{170}$$

180. Per quanto spetta alle condizioni geometriche diciamo s il raggio del parallelo alla distanza γ dal baricentro, e sia

$$s = f(\gamma)$$

l'equazione del meridiano del corpo, e siano α e β le altre due coordinate del punto di contatto col piano per cui sarà

$$s^2 = \alpha^2 + \beta^2$$

La normale al punto di contatto dovendo poi essere anche normale al piano, ed essendo θ l'angolo che alla fine del tempo t la detta normale forma coll'asse di figura, sarà

$$\cot.\theta = -\left(\frac{ds}{d\gamma}\right) = -f'(\gamma) \tag{171}$$

e

$$z_1 = \gamma.\cos\theta + s.\operatorname{sen}\theta. \tag{172}$$

Ricavando dalla (171) γ in funzione di θ, e sostituendo questo valore in s e nella (172) si avrà anche z_1 in funzione di θ, e sarà

$$\alpha = -f(\gamma).\operatorname{sen}\varphi; \qquad \beta = -f(\gamma)\frac{\operatorname{sen}^2\varphi}{\cos\varphi} \tag{173}$$

Se il corpo si terminasse in punta, come ad es. nel caso della trottola, e che toccasse quindi il piano sempre nello stesso punto, allora sarebbe

$$\alpha = o; \qquad \beta = o; \qquad \gamma = \text{costante}; \qquad z_1 = \gamma.\cos\theta.$$

181. Supponiamo che il corpo nella parte con cui poggia sul piano sia formato da una calotta sferica di raggio r, e sia e la distanza del centro di questa sfera dal baricentro del sistema, sarà

$$z_1 = r \pm e \cdot \cos\theta$$

secondo che il baricentro del sistema è collocato sopra o sotto il centro della sfera. Porremo

$$z_1 = r + e \cdot \cos\theta \tag{174}$$

dove comprenderemo i due casi prendendo e positivo nel primo e negativo nel secondo.

Per semplicità supporremo che all'origine siasi impressa soltanto una velocità angolare n intorno all'asse di figura, e che il corpo poggiasse sul piano così che il suo asse di figura formasse un angolo θ_0 colla normale al piano stesso; per $t = o$ dovrà essere

$$(175)\left\{\begin{array}{l} w_x = o\,;\ w_y = o\,;\ w_z = n;\ \theta = \theta_0\,;\ \frac{dx_1}{dt} = o\,;\ \frac{dy_1}{dt} = o\,;\ \frac{dz_1}{dt} = o \\ \qquad x_1 = o\,;\ y_1 = o\,;\ z_1 = r + e \cdot \cos\,\theta_0\,; \end{array}\right.$$

dalle (168), per la (174), avremo tosto

$$(176)\quad x_1 = \frac{1}{2} g \cdot \operatorname{sen} i \cdot t^2\,; \qquad y_1 = o\,;$$

$$\frac{N}{m} = g \cdot \cos i - e\left(\operatorname{sen}\theta \cdot \frac{d^2\theta}{dt^2} + \cos\theta \cdot \left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2\right)$$

le quali ci dicono intanto che il baricentro si mantiene sempre nel piano verticale che passa per la linea di massima pendenza del piano, e che il suo moto parallelamente al piano è un moto uniformemente accelerato. Oltre questo moto esso ha pure un secondo moto perpendicolarmente al piano dipendente dal valore di z_1, ma questo si lega al suo moto rotatorio, per essere z_1 funzione di θ, e non può essere determinato se non se congiuntamente a quest'ultimo; così pure con questo moto si lega la pressione N mediante la terza delle (176).

182. Sostituendo nelle (169) e (169)' ad w_x, w_y i loro va-

lori dati dalle (93) e determinando le costanti così da soddisfare alle condizioni iniziali espresse dalle (175) si avrà

$$(177)\quad \begin{cases} \text{sen}^2\theta.\left(\frac{d\Psi}{dt}\right)=\frac{i_z^2 n}{i_x^2}\left(\cos\theta_o-\cos\theta\right) \\ \text{sen}^2\theta\left(\frac{d\Psi}{dt}\right)^2+\left(1+\frac{e^2}{i_x^2}\text{sen}^2\theta\right)\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2=\frac{2ge\cos i}{i_x^2}(\cos\theta_o-\cos\theta) \end{cases}$$

dalle quali, ponendo per brevità di scrittura

$$(178)\qquad \frac{2ge.\cos i}{i_x^2}=\frac{1}{a}\,;\quad \frac{e^2}{i_x^2}=c^2\,;\quad \frac{i_z^2 . n}{i_x^2}=b$$

si ottiene tosto le

$$(179)\quad dt=\sqrt{a}\cdot\frac{\sqrt{(1+c^2.\text{sen}^2\theta)}\ \text{sen}\,\theta.d\theta}{\sqrt{(\cos\theta_o-\cos\theta)}\ \sqrt{\{\text{sen}^2\theta-ab^2(\cos\theta_o-\cos\theta)\}}}$$

$$(180)\quad d\Psi=b.\cos^2\tfrac{1}{2}\theta_o\cdot\frac{dt}{1+\cos\theta}-b.\text{sen}^2\tfrac{1}{2}\theta_o\cdot\frac{dt}{1-\cos\theta}.$$

Se il baricentro è situato al di sotto del centro della sfera allora e, e quindi a, sono negativi, e la (179) si muta nella

$$(181)\quad dt=\sqrt{-a}\cdot\frac{\sqrt{(1+c^2.\text{sen}^2\theta)}\ \text{sen}\theta.d\theta}{\sqrt{(\cos\theta-\cos\theta_o)}\ \sqrt{\{\text{sen}^2\theta-ab^2(\cos\theta-\cos\theta_o)\}}}$$

183. Nel caso della (179), se b è così grande da rendere $ab^2.\cos\theta_o>1$, ponendo

$$m_1=\tfrac{1}{2}ab^2-\sqrt{\left(\tfrac{1}{4}a^2b^4-ab^2.\cos\theta_o+1\right)}$$

$$m_2=\tfrac{1}{2}ab^2+\sqrt{\left(\tfrac{1}{4}a^2b^4-a^2b^2.\cos\theta_o+1\right)}$$

essa diventa

$$(182)\quad dt=\sqrt{a}\cdot\frac{\sqrt{(1+c^2.\text{sen}^2\theta)}.\text{sen}\theta.d\theta}{\sqrt{\{(\cos\theta_o-\cos\theta)(\cos\theta-m_1)(m_2-\cos\theta)\}}}$$

e così pure la (171) si trasforma nella

$$(183) \quad dt = \sqrt{a} \cdot \frac{\sqrt{(1+c^2 . \mathrm{sen}^2\theta)} . \mathrm{sen}\,\theta . d\theta}{\sqrt{\{(\cos\theta - \cos\theta_o)(m_1 - \cos\theta)(m_2 + \cos\theta)\}}}$$

ponendo

$$(184) \quad \begin{cases} m_1 = -\frac{1}{2} a b^2 + \sqrt{\left(\frac{1}{4} a^2 b^4 + a b^2 . \cos\theta_o + 1\right)} \\ m_2 = \frac{1}{2} a b^2 + \sqrt{\left(\frac{1}{4} a^2 b^4 + a b^2 . \cos\theta_o + 1\right)}, \end{cases}$$

dalle quali apparisce che $\cos\theta$ resta sempre compreso fra i due valori $\cos\theta_o$ ed m_1, oscillando quindi fra limiti tanto più ristretti quanto più m_1 si avvicinerà a $\cos\theta_o$, ossia quanto più grande sarà b, cioè la velocità angolare impressa al mobile; donde conchiudesi che nel caso in cui n sia molto grande l'equatore del mobile conserva un'inclinazione pressochè costante col piano su cui posa.

In quest'ultimo caso, limitandosi alle terze potenze inclusive della quantità $\frac{1}{b}$, e ponendo

$$(185) \quad \frac{c^2}{c^2+1} = \alpha^2, \quad \cos\theta = \cos\theta_o - \frac{\mathrm{sen}^2\,\theta_o}{a b^2} \cos.^2 u$$

mediante lo sviluppo in serie si avrà

$$dt = -\frac{2c . \sqrt{1-\alpha^2 . \cos^2\theta_o}}{\alpha . b} . du - 2 . \frac{c\alpha \cos\theta_o . \mathrm{sen}^2\theta_o}{a . b^3 \sqrt{1-\alpha^2 . \cos^2\theta_o}} . \cos^2 u . du$$

e

$$d\Psi = -\frac{2c . \sqrt{1-\alpha^2 \cos^2\theta_o}}{\alpha . a . b^2} \cos^2 u . du$$

donde, integrando così che per $t = o$ riesca $u = \frac{\pi}{2}$; $\Psi = \Psi_o$,

si avrà

$$
(186)\begin{cases}
t=\dfrac{2c.\sqrt{1-\alpha^2.\cos^2\theta_0}}{\alpha.b}\left(\frac{\pi}{2}-u\right) \\
+\dfrac{c.\alpha.\cos\theta_0.\operatorname{sen}^2\theta_0}{a.b^3\sqrt{1-\alpha^2.\cos^2\theta_0}}\left\{\left(\frac{\pi}{2}-u\right)-\operatorname{sen}u.\cos u\right\} \\
\Psi=\Psi_0-\dfrac{c.\sqrt{1-\alpha^2.\cos^2\theta_0}}{\alpha.a.b^2}\left\{\left(\frac{\pi}{2}-u\right)-\operatorname{sen}u.\cos u\right\}
\end{cases}
$$

dalla quale ultima equazione apparisce che l' intersezione del piano dell'equatore del mobile col piano su cui posa é dotata di un moto retrogrado, pressochè uniforme e lentissimo rapporto al moto di rotazione di cui è dotato il corpo intorno al proprio asse.

Articolo III.

Di alcuni mutamenti che avvengono nel moto di un sistema rigido per la comunicazione o la sottrazione di assegnate quantità di moto.

184. Chiuderò questo trattatello del moto dei sistemi rigidi con alcune proposizioni relative ai mutamenti che avvengono nel moto del sistema stesso quando, durante il moto, vengano comunicate al sistema nuove quantità di moto, o per una causa qualunque rimanga estinta una parte delle quantità di moto da esso possedute; per ciò risolverò prima il seguente

Problema. Date le tre componenti w_x; w_y; w_z della rotazione w intorno a dato asse, e le tre componenti v_x; v_y; v_z della traslazione v del sistema stesso, assegnare l'asse di scorrimento.

Sieno x_1; y_1 le coordinate del punto O in cui l'asse di scorrimento incontra il piano XY; trasportata la rotazione w al punto O avremo quivi riprodotte le tre rotazioni w_x; w_y; w_z ed avremo inoltre tre traslazioni

$-w_z.y_1$ secondo X; $w_z.x_1$ secondo Y; ed $w_x.y_1-w_y.x_1$ secondo Z,

con ciò potremo considerare il sistema come dotato della rotazione w intorno ad asse parallelo al primo e passante per O, e della traslazione V risultante dalle tre

$$v_x - w_z \cdot y_1 \text{; secondo } X\text{; } v_y + w_z \cdot x_1 \text{ secondo } Y,$$

e

$$v_z + w_x \cdot y_1 - w_y \cdot x_1 \text{ secondo } Z;$$

Se vogliamo che la translazione V sia diretta secondo l' asse della rotazione w dovrà essere

$$\frac{v_x - w_z y_1}{V} = \frac{w_x}{w}; \quad \frac{v_y + w_z . x_1}{V} = \frac{w_y}{w}; \quad \frac{v_z + w_x . y_1 - w_y . x_1}{V} = \frac{w_z}{w}$$

dalle quali si ha tosto

$$(187) \qquad V . w = v_x \cdot w_x + v_y \cdot w_y + v_z \cdot w_z$$

ed

$$(188) \quad w_y . V - v_y . w = w_z . x_1 w; \quad v_x . w - V . w_x = w_z . y_1 w$$

185. Ciò premesso al capo III. art. V. abbiamo veduto che se un sistema rigido è dotato di una rotazione w intorno a dato asse e d'una traslazione v parallela all' asse della rotazione tutte le quantità di moto dalle quali è animato nell' istante che si considera si riducono ad una quantità di moto

$$(189) \qquad m . V = m w r . \left\{ \frac{i\lambda_{yz}}{i_z^2} + \frac{v}{w . r} \right\}$$

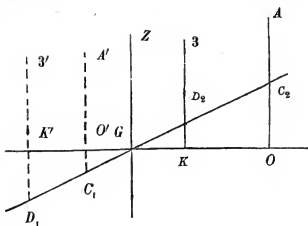
passante pel baricentro e diretta parallelamente all'asse di rotazione, e ad una quantità di moto

$$(190) \qquad m U = m w r \sqrt{\left\{ 1 + \left\{ \frac{i\lambda_{yz}}{i_z^2} \right\}^2 \right\}}$$

applicata al centro di giratore minimo, situata in un piano parallelo all' asse di rotazione e perpendicolare al piano passante per l'asse di rotazione e pel baricentro, e così diretta da formare coll'asse Z un angolo tale che sia

$$(191) \qquad \text{tang.} \widehat{UZ} = -\frac{i_z^2}{i\lambda_{yz}}.$$

186. Sieno ora D_1 e D_2 due centri reciproci di giratore minimo corrispondenti ad assi paralleli all'asse O e giacenti con esso in un medesimo piano passante pel baricentro G del si-

stema; si scomponga la quantità di moto mU applicata in C_1, centro di giratore minimo corrispondente all' asse O, in due, l'una mu_1 applicata in D_1, e l'altra mu_2 applicata in D_2; sarà

$$U = u_1 + u_2; \quad u_1 = U \cdot \frac{C_1 D_2}{D_1 D_2}; \quad u_2 = U \cdot \frac{C_1 D_1}{D_1 D_2}$$

ma, detto α l'angolo ZGC_2 che la retta luogo dei centri di giratore minimo fa colla direzione Z degli assi, r la distanza GO, ed x la GK, è

$$GC_2 = \frac{r}{\operatorname{sen}\alpha}; \quad GD_2 = \frac{x}{\operatorname{sen}\alpha}; \quad GC_1 = \frac{i_z^2}{r.\operatorname{sen}\alpha}; \quad GD_1 = \frac{i_z^2}{x.\operatorname{sen}\alpha}$$

quindi, sostituendo questi valori nelle precedenti relazioni, sarà

$$u_1 = U \cdot \frac{\left(i_z^2 + rx\right)x}{r\left(i_z^2 + x^2\right)}; \quad u_2 = U \cdot \frac{(r - x)\, i_z^2}{r\left(i_z^2 + x^2\right)}$$

e sostituendo ad U il suo valore,

$$(192)\quad \left\{ \begin{aligned} u_1 &= w \cdot \frac{(i_z^2 + rx) \cdot x}{i_z^2 + x^2} \cdot \sqrt{1 + \left\{ \frac{i\lambda_{yz}}{i_z^2} \right\}^2} \\ u_2 &= w \cdot \frac{(r - x) \cdot i_z^2}{i_z^2 + x^2} \cdot \sqrt{1 + \left\{ \frac{i\lambda_{yz}}{i_z^2} \right\}^2} \end{aligned} \right.$$

le quali, essendo parallele ad U, giaceranno in piani paralleli all'asse O e perpendicolari al piano passante per l'asse e pel baricentro, e formeranno coll'asse Z un angolo la cui tangente sarà

$$- \frac{i_z^2}{i\lambda_{yz}}$$

Dietro ciò il sistema potrà considerarsi come animato dalla quantità di moto mV passante pel baricentro G e dalle due mu_1 ed mu_2 passanti pei punti D_1 e D_2.

187. Se l'asse OA intorno a cui ruota il corpo è un asse permanente allora è $i\lambda_{yz} = o$, e quindi sarà

$$(193)\quad \left\{ \begin{aligned} & V = v\,; \qquad U = wr \\ & u_1 = w \cdot \frac{(i_z^2 + r.x)x}{i_z^2 + x^2}\,; \quad u_2 = w\,\frac{(r - x)\, i_z^2}{i_z^2 + x^2} \end{aligned} \right.$$

e queste riesciranno normali al piano che passa per l'asse e pel baricentro.

Quando sia pure $r = o$ allora le velocità assolute dei due punti D_1 e D_2 saranno rispettivamente

$$w\left(r + \frac{i_z^2}{x}\right); \qquad w\,(r - x)$$

e se la massa totale m del sistema si suppone spartita in due μ_1 e μ_2 inversamente proporzionali alle distanze dei punti D_1 e D_2 dal baricentro, sarà

$$\mu_1 = m \cdot \frac{x^2}{i_z^2 + x^2}\,; \quad \mu_2 = m \cdot \frac{i_z^2}{i_z^2 + x^2}$$

per cui, se si suppongano le due parti concentrate in D_1 ed in D_2, il sistema delle due masse μ_1 e μ_2' concentrate nei punti D_1 e D_2 ruotando intorno all'asse OA con velocità angolare w possederà le stesse quantità di moto del sistema proposto.

188. Il massimo valore che possono prendere u_1 ed u_2 corrisponde ai due valori di x

$$x_1 = i_o + r;\ x_2 = i_o - r$$

nei quali, posto per brevità di scrittura

$$V\left\{1+\left(\frac{i\lambda_{yz}}{i_z^2}\right)^2\right\}=k,$$

diventano rispettivamente

$$(194)\quad u_1 = \frac{1}{2}k \cdot w(i_o + r);\quad u_2 = \frac{1}{2}k \cdot w(i_o - r)$$

pel primo; ed

$$(195)\quad u_1 = -\tfrac{1}{2}k\,w(i_o - r);\quad u_2 = -\tfrac{1}{2}k(i_o + r)$$

pel secondo.

Così pure la minima distanza dei due centri reciproci D_1 e D_2 essendo corrispondente ad $x = i_z^2$, nel qual caso distano egualmente dal baricentro, quando questo succeda sarà

$$(196)\ u_1 = \tfrac{1}{2}k.\,w(i_z + r);\ u_2 = -\tfrac{1}{2}k.\,w(i_z - r)$$

189. Abbiasi ora un corpo il quale ruoti con velocità angolare w intorno all'asse OA e contemporaneamente si trasporti parallelamente ad OA con velocità assoluta v, al qual caso è riducibile pel § 184 qualunque caso di movimento, e con un mezzo qualunque venga trasmessa al sistema una quantità di moto mu_2 eguale e direttamente opposta alla mu_2 calcolata sopra, passante cioè per D_2 e diretta in senso opposto alla u_2, allora si estinguerà tutta la quantità di moto raccolta in D_2 e resteranno solo la quantità di moto mu_1 raccolta in D_1 e la quantità di moto $m\,V$ applicata al baricentro e diretta parallela-

mente all'asse. In virtù di queste due quantità di moto, § 177, il corpo concepirà una rotazione w_1 intorno all'asse KB parallelo ad OA e coniugato a D_1 ed una traslazione parallela all'asse con velocità assoluta v_1; le quali quantità si avranno ponendo nelle (189) (190) in luogo di mU il valore di mu_2 e mutando w e v in w_1 e v_1. Con ciò avremo

$$(197) \quad \begin{cases} w_1 = w \dfrac{i_z^2 + r\,x}{i_z^2 + x^2} \\ v_1 = v + w.\, i\lambda_{yz}. \dfrac{r - x}{i_z^2 + x^2} \end{cases}$$

Che se invece venisse comunicata al corpo una quantità di moto mu_1 eguale e direttamente opposta alla mu_1 il corpo girerebbe intorno all'asse $K'B'$ con velocità angolare w_2 e si trasporterebbe con velocità assoluta v_2 date dalle

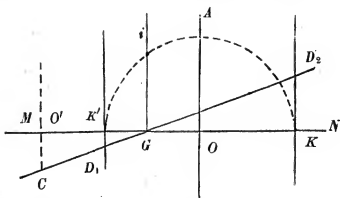
$$(198) \quad \begin{cases} w_2 = -\, w. \dfrac{(r - x).x}{i_z^2 + x^2} \\ v_2 = v + w \dfrac{i\lambda_{yz}}{i_z^2} \cdot \dfrac{(i_z^2 + r\,x)\,x}{i_z^2 + x^2} \end{cases}$$

Se l'asse di rotazione fosse un asse permanente, essendo $i\lambda_{yz} = o$, la traslazione non riescirebbe alterata, e le rotazioni resterebbero le stesse superiori.

190. Il caso precedente potrebbe realizzarsi mediante un corpo il quale venga ad urtare il sistema nella direzione di u_1 o di u_2 con una quantità di moto mu_1 od mu_2 e si fermi poscia a far parte del sistema; oppure venendo il sistema ad urtare contro un ostacolo in modo che la normale al punto di contatto passi per D_1 o per D_2 e sia diretta nel senso di u_1 od u_2, e che di più l'ostacolo opposto non impedisca il moto di trasporto parallelamente all'asse di rotazione; in questo caso la quantità di moto perduta dal sistema passa nell'ostacolo opposto al suo movimento, e rappresenta la percossa che prova l'ostacolo per l'urto del sistema. Manifestamente pel § 180 una tale percossa sarà massima opponendo l'ostacolo nell'uno o nell'altro dei due punti determinati dalle

$$x_1 = i_o + r\,; \quad x_2 = i_o - r$$

Particolarmente considerando la u_2, se GO rappresenta la distanza del baricentro dall'asse di rotazione e Gi il valore di i_z e sia $D_1 D_2$ la retta luogo dei centri di giratore minimo corri-

spondente ad assi di rotazione paralleli a GZ, se fatto centro in O con raggio Oi si descriva una circonferenza di cerchio, e dai punti K e K' dove taglia MN, condotta per G perpendicolarmente alla GZ, si innalzino le KD_2; $K'D_1$ parallele ad OA, nei punti D_2 e D_1 si avranno quelli in cui la percossa e massima; essa sarà poi $-\frac{m}{2}\, k\, w\, (i_o - r)$ in D_2; e $\frac{m}{2}\, k\, w\, (i_o + r)$ in D_1. Se l'asse OA è un asse permanente allora sarà, § 180, $k = 1$

191. Se l'asse OA è un asse permanente e il corpo non faccia che ruotare intorno ad OA allora tutte le quantità di moto che animano il corpo sono riducibili ad una sola che passa pel centro C di giratore nullo corrispondente all'asse $O\,i$ ed è diretta perpendicolarmente al piano che passa per l'asse stesso e pel baricentro. Un tal punto si disse centro di percossa forse supponendo che venendo ad urtare contro un ostacolo in detto punto eserciterebbe la maggior percossa possibile; ma si scorge ciò non esser vero, imperocchè la massima percossa sarebbe invece esercitata urtando in D_1 al quale, come osserva Poinsot, competerebbe più propriamente quel nome.

I due punti D_1 e D_2 corrispondono a due percosse massime, il primo D_1 è un centro di percossa nello stesso senso delle

quantità di moto che animano il corpo; il secondo D_2 corrisponde pure ad una percossa massima ma in senso contrario, ed essa è anche minore.

192. Alcune questioni paiono meritare particolare osservazione, e di queste ci occuperemo risolvendo i seguenti problemi.

Problema I. Assegnare quel punto D_2 pel quale deve passare la quantità di moto mu_2 comunicata al corpo in senso opposto alla mu_2 perchè sia estinta la traslazione e resti soltanto la rotazione intorno adj asse paralello al primitivo e passante per D_2.

Dovendo essere $v_1 = o$ sarà per la (197)

$$v \,.\, (i_z^2 + x^2) + w \,.\, i\lambda_{yz} \cdot (r - x) = o$$

donde

$$(199) \quad x = \frac{1}{2} \cdot \frac{wr}{v} \cdot \frac{i\lambda_{yz}}{r} \pm \sqrt{\left\{ \left\{ \frac{1}{2} \cdot \frac{wr}{v} \cdot \frac{i\lambda_{yz}}{r} - r \right\}^2 - i_o^2 \right\}} \,.$$

Perchè il problema sia possibile è necessario che sia

$$\frac{w \,.\, r}{v} > 2 \,.\, \frac{(i_o + r) \,.\, r}{i\lambda_{yz}}$$

e quando ciò abbia luogo allora i punti sono due, e giaciono ambedue dalla medesima parte del baricentro.
Se fosse

$$\frac{wr}{v} = 2 \,.\, \frac{(i_o + r) \,.\, r}{i\lambda_{yz}}$$

i due punti si riunirebbero nel punto D_2 corrispondente ad $x = i_o + r$ e riescirebbe $w_1 = \frac{1}{2} w$

Se v fosse negativo, ossia se la traslazione avvenisse in senso opposto all'asse, per la realtà del problema dovrebbe essere

$$\frac{wr}{v} > 2 \,.\, \frac{(i_o - r)\, r}{i\lambda_{yz}}$$

e se riescisse

$$\frac{wr}{v} = 2 \,.\, \frac{(i_o - r)\, r}{i\lambda_{yz}}$$

i due punti si riunirebbero in D_1, corrispondente ad $x = -(i_o - r)$ e ritornerebbe $w_1 = \frac{1}{2} w$.

193. *Problema* II. Assegnare quel punto per cui deve passare la quantità di moto opposta al corpo perchè la velocità angolare di rotazione dopo l'urto sia la più grande possibile, nonchè quello per cui sia massima la velocità assoluta di rotazione del baricentro.

Per assegnare il primo punto converrà render massima la quantità

$$\frac{i_z^2 + r \cdot x}{i_z^2 + x^2}$$

ed i soliti metodi ci somministreranno i due valori

$$x_1 = \frac{i_z (i_o - i_z)}{r} \; ; \; x_2 = -\frac{i_z (i_o + i_z)}{r} \tag{200}$$

ai quali corrispondono le due velocità angolari

$$w_1 = \frac{1}{2} w \frac{i_o + i_z}{i_z} ; \; w_1' = -\frac{1}{2} w \cdot \frac{i_o - i_z}{i_z}$$

per essere $i_o^2 - i_z^2 = r^2$

Per assegnare invece quei punti per cui riesce massima la velocità assoluta di rotazione del baricentro converrà rendere massima la quantità

$$\frac{i_z^2 \cdot x + r \cdot x^2}{i_z^2 + x^2}$$

e i soliti criterii daranno

$$x_1 = i_o + r ; \; x_2 = -(i_o - r)$$

pei quali sarà

$$w_1 \cdot x_1 = \frac{1}{2} w (i_o + r) ; \; w_1 \cdot x_2 = -\frac{1}{2} w (i_o - r) ;$$

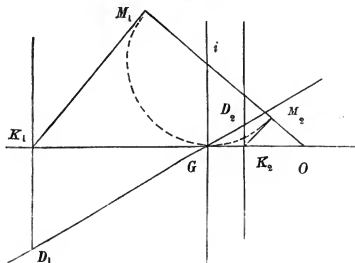
questi ultimi punti corrispondono a quelli pei quali è massima la quantità di moto.

Le (200) si costruiscono tosto così; si valuti la distanza dei punti K_2; K_1 dal punto O e sarà

$$OK_2 = r - x_1 = \frac{i_o(i_o - i_z)}{r}$$

$$OK_1 = r + x_2 = \frac{i_o(i_o + i_z)}{r};$$

quindi prendendo $G i = i_z$ e fatto centro in i, e con raggio $i G$ descritta una semiconferenza, se dai punti M_2, M_1 in cui taglia la $O i$ si conducano le $M_2 K_2$, $M_1 K_1$ rispettivamente perpendi-

colari ad $O i$ saranno K_2 e K_1 i punti cercati, e quindi D_2 e D_1 quelli per cui passando la quantità di moto opposta al sistema la velocità angolare di rotazione sarà massima.

194. *Problema* III. Assegnare quel punto pel quale convien far passare la quantita di moto opposta al sistema perchè la velocità di traslazione dopo l'urto sia la massima possibile.

A quest'uopo la seconda delle (197) ci dice che converrà render massima la quantità

$$\frac{r - x}{i_z^2 + x^2}$$

e quindi sarà

$$x_1 = i_o + r;\ x_2 = -(i_o - r)$$

e passando per questi punti la quantità di moto opposta al sistema sarà

$$v_1 = v - \tfrac{1}{2} w \frac{i\lambda_{yz}}{i_o + r};\ v_2 = v + \tfrac{1}{2} w \frac{i\lambda_{yz}}{i_o - r};$$

evidentemente i punti x_1 ed x_2 corrispondono ai due centri coniugati di giratore minimo per cui sono massime u_1 ed u_2.

195. *Problema* IV. Assegnare quei punti per cui deve passare la quantità di moto opposta al sistema perchè la velocità assoluta del baricentro dopo l'urto sia la più grande possibile.

Essendo il quadrato della velocità assoluta del baricentro dopo l'urto

$$w_1^2 \cdot x^2 + v_1^2$$

bisognerà soddisfare alla

$$w_1 x \cdot \left(\frac{d \cdot w_1 x}{dx}\right) + v_1 \left(\frac{d v_1}{d x}\right) = o\ .$$

Sostituendo in questa i valori di w_1 e di v_1 dati dalle (197) si ottiene un'equazione del quarto grado la quale è risolubile nelle due

$$x^2 - 2 r x - i_z^2 = o$$

$$\left(\frac{i\lambda_{yz}}{i_z^2} \cdot \frac{v}{wr} - 1\right) \cdot x^2 - \frac{i_z^4 + \overline{i\lambda_{yz}}^2}{r i_z^2} \cdot x + i\lambda_{yz} \cdot \left(\frac{v}{wr} + \frac{i\lambda_{yz}}{i_z^2}\right) = o$$

La prima somministra

$$x_1 = i_o + r;\ x_2 = -(i_o - r)$$

come è evidente, dovendo essere massima la velocità assoluta del baricentro per quei punti pei quali è massima tanto la sua velocità assoluta di rotazione quanto la sua velocità di traslazione.

La seconda poi avrà due radici reali se sarà

$$\left(\frac{i_z^4 + \overline{i\lambda_{yz}}^2}{2 r i_z^2}\right)^2 > i\lambda_{yz} \left(\frac{v}{wr} + \frac{i\lambda_{yz}}{i_z^2}\right)\left(\frac{i\lambda_{yz}}{i_z^2} \cdot \frac{v}{wr} - 1\right)$$

ed i corrispondenti valori della x corrispondono al caso in cui la velocità assoluta dal baricentro sia minima

Se sia

$$v = - \omega r . \frac{i\lambda_{yz}}{i_z^2},$$

nel qual caso tutte le quantità di moto sono riducibili ad una soltanto passante pel centro di giratore minimo, avremo

$$x = - \frac{i_z^2}{r}$$

cioè il centro stesso di giratore minimo, e si estinguerà qualunque movimento; l'altro valore $x = o$ corrisponde ad un centro situato a distanza infinita.

Lo stesso succede se sia $i\lambda_{yz} = o$, ossia se l'asse di rotazione è un'asse permanente, allora torna

$$x = - \frac{i_z^2}{r}$$

come era facile il prevedere.

Si potrebbero qui discutere altre questioni ma le accennate mi paiono sufficienti a dare una chiara idea del problema, intorno al quale potrà lo studioso consultare con molto profitto i lavori originali del Poinsot, col cui celebre nome io vado lieto di poter chiudere questa mia debole fatica.

Errata - Corrige

Pag.	*lin.*	*errori*	*correzioni*
10	24	determina	determinano
42	7	$\frac{K^2}{i_z^2}$	$\frac{K^2}{i_z}$
id.	22	piano passanti pel	piano passante pel
46	13	coordini allo	coordinino allo
54	19	motrice coll'elemento	motrice sull'elemento
55	13	descritta che ciascun	descritta da ciascun
57	17	così nello	cioè nello
id.	18	moto i centri	moto. I centri
id.	26	data per cui il	data godono della proprietà che il
60	11	dei detti piani si	dei detti piani quale asse delle X' si
61	13	punto stesso una retta	punto stesso e pel baricentro una retta
63	19	della (49) se	della (49) che
72	10	$x_0\ y_0$	$x_0\ z_0$
id.	18	dei primi	dei perni
76	11	due primi	due perni
96	4	se dicevamo	se diciamo
111	23	contare v della retta	contare v dalla retta
132	13	$g^2(o) f^2(x) + h^2(o)$	$g^2(o) . f^2(x) + h^2(x)$